תרגול 9 – תכנות לינארי

הערה חשובה בנוגע לתרגילי הבית

כאשר מגישים ב-gradescope צריך לסמן את כל הדפים ששאלה מופיעה בהם, ולא רק את הראשון!

מי שלא הגיש כך את תר' 3: יש לבצע Reselect Pages עוד היום.

תכנות ליניארי – מה יש לנו?

- n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- m אי-שוויונים ליניאריים. למשל,

$$x_1 + x_2 + 4x_n \le 6$$
$$x_{12} + 4x_4 - 2x_{17} + x_1 = 22$$
$$\ldots$$
$$2x_4 + x_n - 12x_2 \ge -20$$

- פונקצית מטרה ליניארית. למשל,

$$\text{minimize } 3x_1 + 5x_2 - 17x_8 + \ldots - x_n / 12$$

תכנות לינארי – מטרה

- פתרון פיזיבילי הינו הצבת ערכים ל- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך שכל m האי-שוויונים מתקיימים.

- אנו מעוניינים באלגוריתם שימצא את הפתרון הפיזיבילי אשר מביא לערך מקסימאלי / מינימאלי של פונקצית המטרה.

תוצאות אפשריות

$$\text{maximize } 2x$$
$$x \leq 5$$

קיים פתרון אופטימאלי

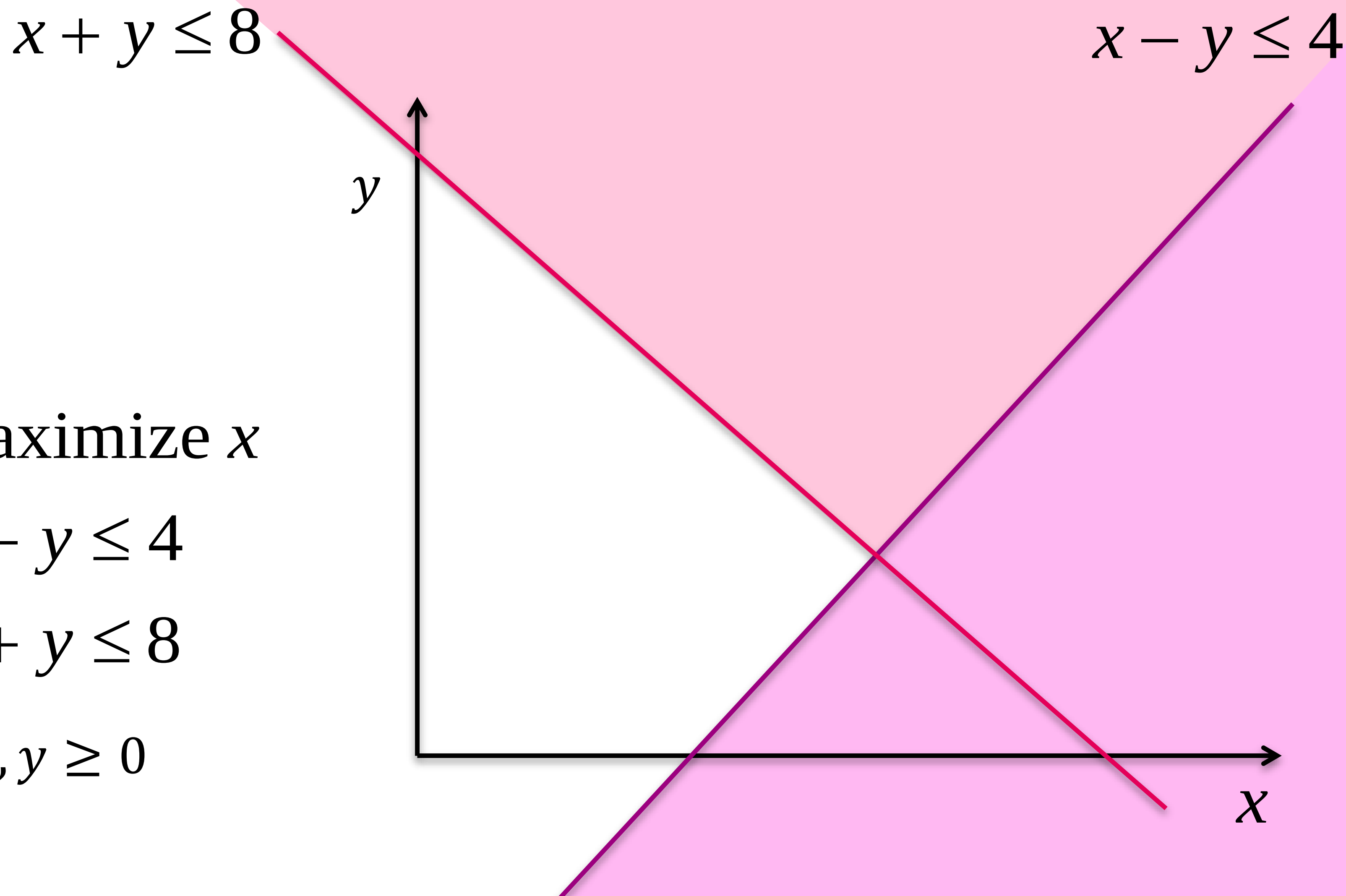
$$\text{maximize } 2x$$
$$x \geq 6$$

הבעיה אינה חסומה (נוכל
לקבל פתרון גדול כרצוננו)

$$\text{maximize } 2x$$
$$x \leq 5$$
$$x \geq 6$$

לא קיים פתרון

הצגה גראפית



maximize x

$x - y \leq 4$

$x + y \leq 8$

$x, y \geq 0$

אלגוריתם הסימפלקס

הדגמה גראפית על הלוח.

צורה סטנדרטית

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad \text{for } i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{for } j = 1,2,\ldots,n$$

תרגיל חימום

נתון שהתכנית:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad \text{for} \;\; i = 1,2,3$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{for} \;\; j = 1,2,\dots,n$$

חסומה, ו – $b_i \ge 0$. הראו שלבעיה פתרון אופטימלי עם לכל היותר 3 משתנים עם ערכים שונים מ – 0.

תרגיל חימום - פתרון

נעבור לצורת slack:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{for} \;\; i = 1,2,3$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{for} \;\; j = 1,2,\ldots,n+3$$

כיוון שקיים פתרון פיזיבילי אופטימלי, אלגוריתם סימפלקס ימצא אחד כזה (מנכונות האלגוריתם). לפי הגדרת פתרון פיזיבלי ביחס לצורת slack, רק המשתנים הבסיסיים לא שווים 0, ויש רק 3 כאלו.

תרגיל 1

יש לכם כמות גדולה של תפוחים, אגסים ובננות לארוחת צהריים.
תפוח מכיל 10 מ״ג אבץ, 20 מ״ג אשלגן ו-30 קלוריות לכל 100 גרם.
אגס מכיל 20 מ״ג אבץ, 15 מ״ג אשלגן ו-20 קלוריות לכל 100 גרם.
בננה מכילה 5 מ״ג אבץ, 40 מ״ג אשלגן ו-50 קלוריות לכל 100 גרם.

אתם רוצים להביא למינימום את כמות הקלוריות שאתם צורכים, אבל הדיאטה מחייבת אתכם לאכול לפחות 55 מ״ג אבץ ו-70 מ״ג אשלגן בכל ארוחה. כמה תאכלו מכל פרי?

תרגיל 1 - פתרון

נגדיר x להיות כמות התפוחים שאנחנו אוכלים, כשיחידה אחת היא מאה גרם.

בדומה, y - כמות האגסים ו- z - כמות הבננות שאנחנו אוכלים.

נפתור את התכנית הלינארית:

$$\min 30x + 20y + 50z$$

$$s.t.\quad \boxed{10x + 20y + 5z \geq 55}$$ אילוצי אבץ

$$\boxed{20x + 15y + 40z \geq 70}$$ אילוצי אשלגן

$$x, y, z \geq 0$$

תרגיל 2

נתונה מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו-n נעלמים המוגדרת ע"י מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ווקטור $b \in \mathbb{R}^m$. נאמר שוקטור $x \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון ε-מקורב של המערכת אם מתקיים $||Ax - b||_\infty = \varepsilon$.

הראו כיצד למצוא פתרון מקורב טוב ביותר.

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

$$||y||_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_m|\}$$

תרגיל 2

נרצה לכתוב תוכנית לינארית מתאימה.
נגדיר משתנה חדש ε.

נסמן לנוחות $y = Ax - b$. כלומר:

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j - b_i$$

המשתנים הם עדיין: ϵ , x_j

נרצה לאלץ $||Ax - b||_\infty = \varepsilon$ כלומר $||y||_\infty = \varepsilon$.

מההגדרה $||y||_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_m|\}$
ומספיק לדרוש $|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_m| \leq \varepsilon$

פתרון תרגיל 2

$$\min \varepsilon$$

s.t. $|y_1| \le \varepsilon$

$|y_2| \le \varepsilon$

.

.

.

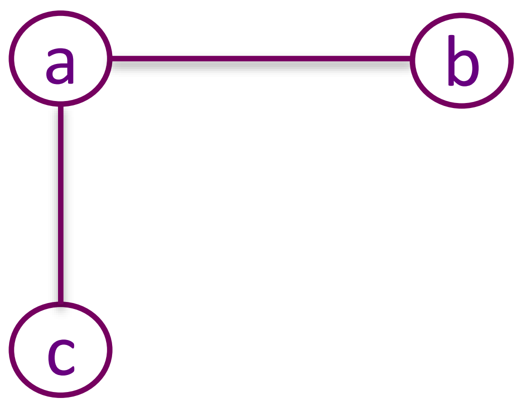
$|y_m| \le \varepsilon$

תרגיל 3

יהא $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T, כך ש**לכל** בחירת משקלים אי שליליים על הקשתות המקיימים $\sum_{e\in E} w(e) = 1$,
יש צומת $v \in V$
המקיים $\sum_{e:v\in e} w(e) \geq T$.

תרגיל 3 – דוגמא 1

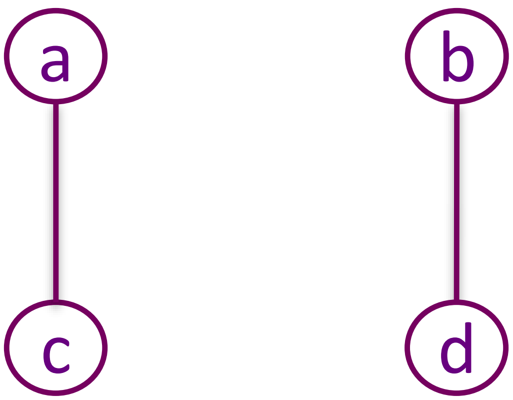
יהא $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T, כך ש**לכל** בחירת משקלים אי שליליים על הקשתות המקיימים $\sum_{e\in E} w(e) = 1$, **יש** צומת $v \in V$ המקיים $\sum_{e:v\in e} w(e) \geq T$.



$T = 1$

תרגיל 3 – דוגמא 2

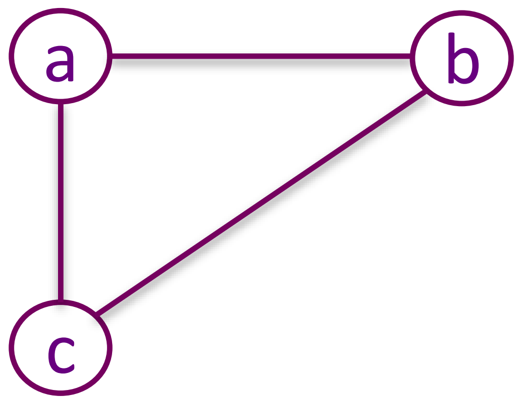
יהא $G = (V,E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T, כך ש**לכל** בחירת משקלים אי שליליים על הקשתות המקיימים $\sum_{e \in E} w(e) = 1$, **יש** צומת $v \in V$ המקיים $T \geq \sum_{e:v \in e} w(e)$.



$T = 1/2$

תרגיל 3 – דוגמא 3

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T, כך **שלכל** בחירת משקלים אי שליליים על הקשתות המקיימים $\sum_{e\in E} w(e)=1$, **יש** צומת $v\in V$ המקיים $\sum_{e:v\in e} w(e)\geq T$.



$T=2/3$

תרגיל 3- פתרון

$$\min T$$

$$\forall v \in V, \sum_{e : v \in e} w(e) \leq T$$

$$\sum_{e \in E} w(e) = 1$$

$$\forall e \in E, w(e) \geq 0$$

תרגיל 3- פתרון

א. פתרון אופטימלי w^*, T^* מקיים $T^* \geq T$:

אם $T < T^*$, אז w^* מתאימה משקלים לקשתות כך שלכל צומת v :

$$\sum_{v \in e} w^*(e) \leq T^* < T$$

בסתירה להגדרת T .

ב. פתרון אופטימלי w^*, T^* מקיים $T^* \leq T$:

אם $T > T^*$, אז בפרט עבור $T > \frac{T^*+T}{2}$ **קיימת** פונקציה w' עבורה **אין** צומת שמקיים $\sum_{v \in e} w'(e) \geq \frac{T^*+T}{2}$, כלומר:

לכל צומת v מתקיים:

$$\sum_{v \in e} w'(e) < \frac{T^* + T}{2}$$

ולכן $w', \frac{T^*+T}{2}$ פתרון פיזיבילי, בסתירה למינימליות T^* .