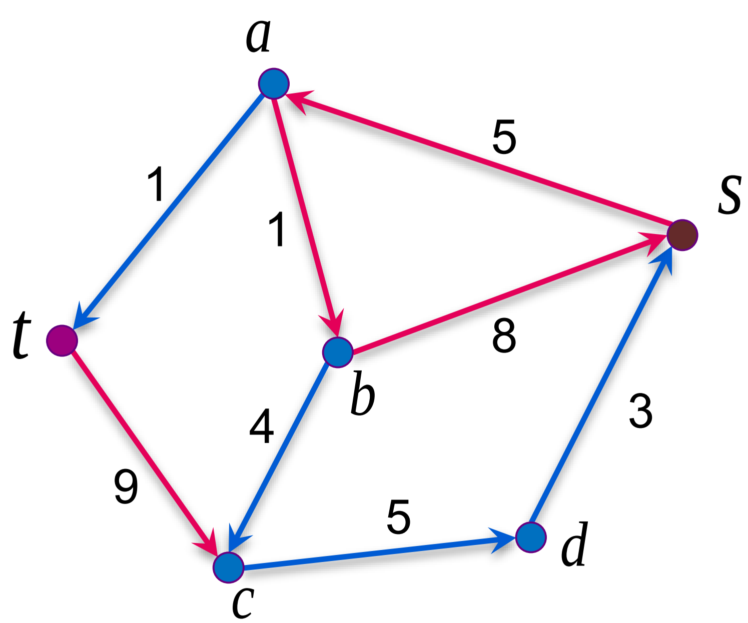
תרגול 7 - דייקסטרא



שאלה 0 – עמקייב = עפיימ?

- **תרגיל:** הוכיחו או הפריכו: עץ המסלולים הקלים המתקבל מהרצת האלגוריתם של Dijkstra על גרף קשיר ולא מכוון G מצומת s כלשהי הוא עץ פורש מינימאלי של G.

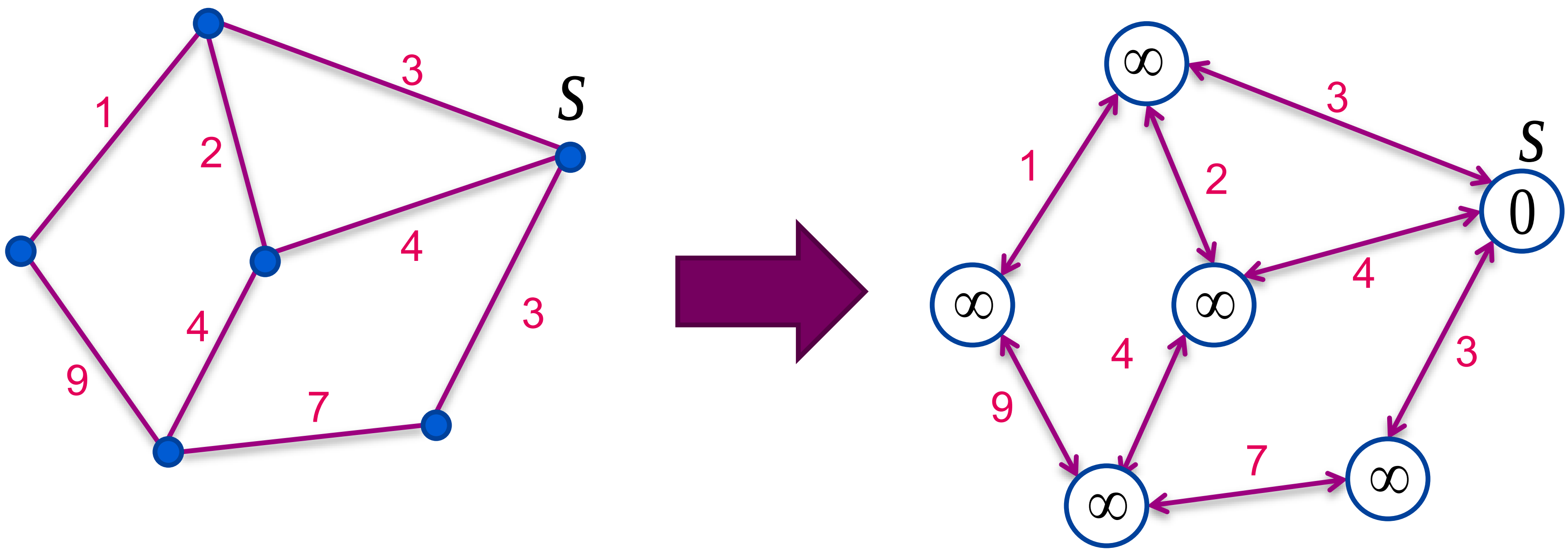
- *הערה:* האלגוריתם של Dijkstra רץ על גרף מכוון. בשביל להריץ את האלגוריתם על גרף לא מכוון, נהפוך כל קשת לא מכוונת (u,v) לשתי קשתות מכוונות (u,v) ו- (v,u).

```
MST-PRIM(G, w, r)
for each u ∈ G.V
    u.key = ∞
    u.π = NIL
r.key = 0
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    for each v ∈ G.Adj[u]
        if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
            v.π = u
            v.key = w(u, v)
```

```
Dijkstra(G, w, s)
for each vertex v ∈ G.V
    v.d = ∞
    v.π = NIL
s.d = 0
S = ∅
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = extract-min(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        if v.d > u.d + w(u, v):
            v.d = u.d + w(u, v)
            v.π = u
```

שאלה 0 – פתרון

- נריץ את האלגוריתם של Dijkstra על גרף לא מכוון.

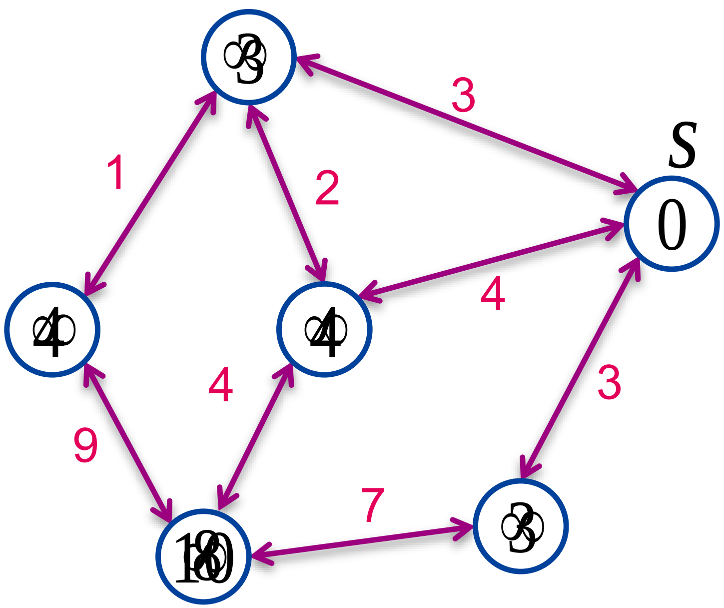


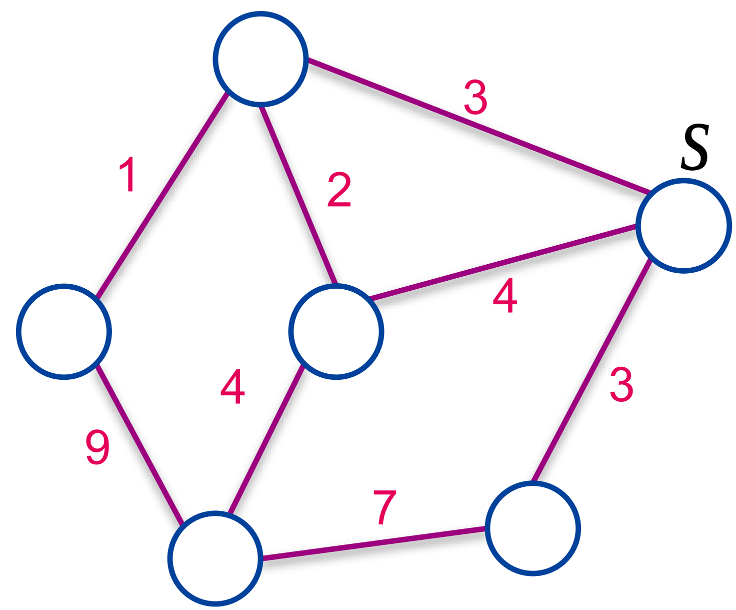
שאלה 0 – פתרון

Dijkstra בקצרה:

- נבחר קודקוד הכי קרוב ל- s שעוד לא בחרנו.
- לכל קשת לשכן שלו, נעשה relax.

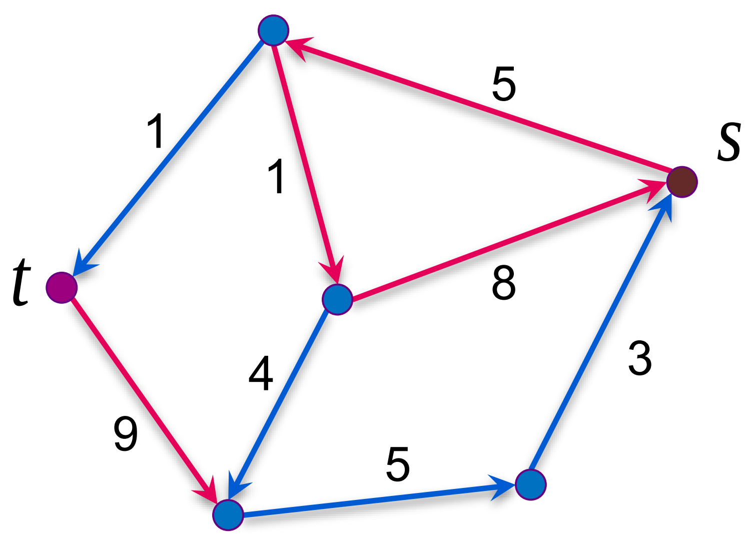
- נשווה עם עפ"מ:



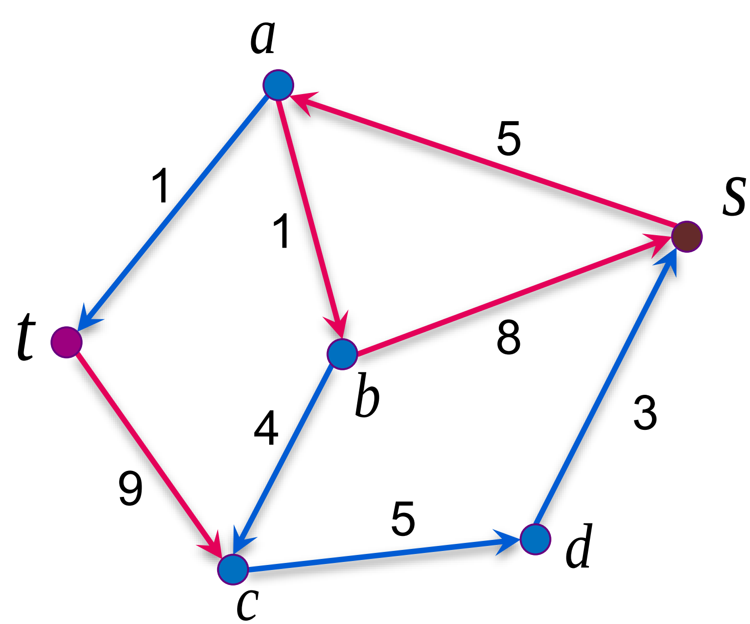


שאלה 1 – מספר זוגי של קשתות אדומות

- **תרגיל:** נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$, זוג צמתים $s,t\in V$, ופונקציית משקל אי-שלילית $w:E\rightarrow[0,\infty)$. בנוסף, כל קשת בגרף צבועה באדום או בכחול. תארו אלג' למציאת המסלול הקל ביותר מ- s ל-t מבין המסלולים המכילים מספר זוגי של קשתות אדומות (המסלול רשאי לעבור דרך אותה קשת יותר מפעם אחת).



שאלה 1 – דוגמא

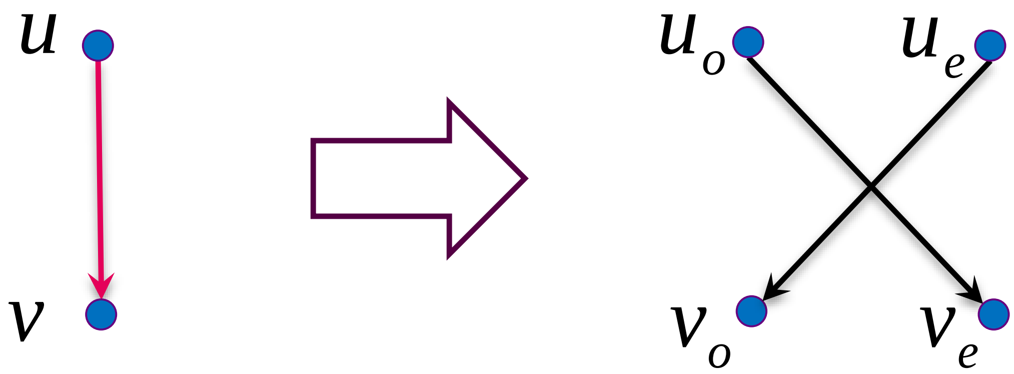


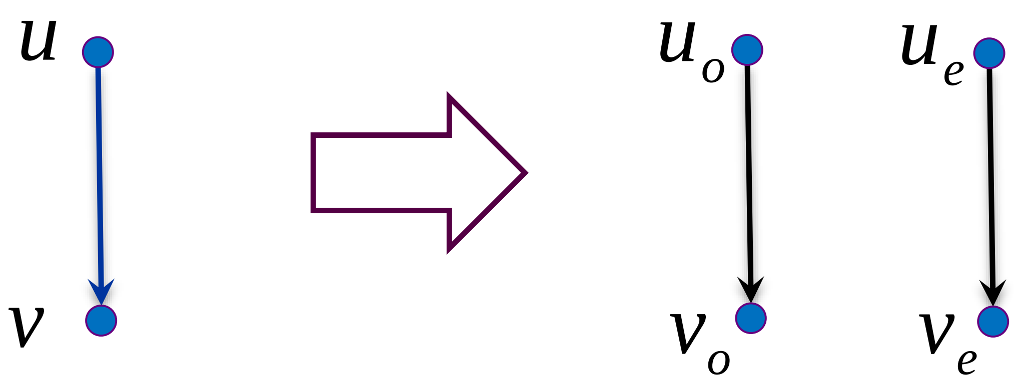
- מהו משקל המסלול הקל ביותר מ- s ל- t אשר עובר דרך מספר זוגי של קשתות אדומות? $s \to a \to b \to s \to a \to t$
- 20

שאלה 1 – פתרון

- נפצל כל קודקוד $v \in V$ לשני קודקודים חדשים $v_o, v_e \in V'$.
- הרעיון הוא ש- v_o יתאים למקרים בהם הגענו ל- v אחרי מעבר על מספר אי-זוגי של קשתות אדומות.
- באופן דומה, v_e יתאים למקרים בהם הגענו ל- v אחרי מעבר על מספר זוגי של קשתות אדומות.
- לכל קשת אדומה $(u,v) \in G$ נגדיר 2 קשתות חדשות ב-G' : (u_e, v_o) ו (u_o, v_e) .
- לכל קשת כחולה $(u,v) \in G$ נגדיר 2 קשתות חדשות ב-G' : (u_e, v_e) ו (u_o, v_o) .

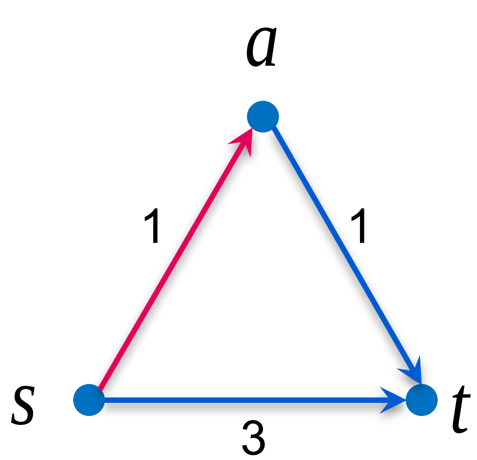
קשתות הגרף החדש



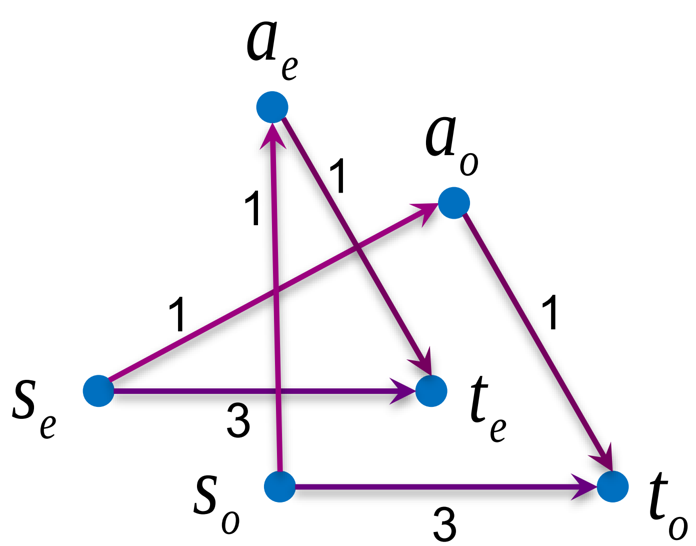


דוגמא

G



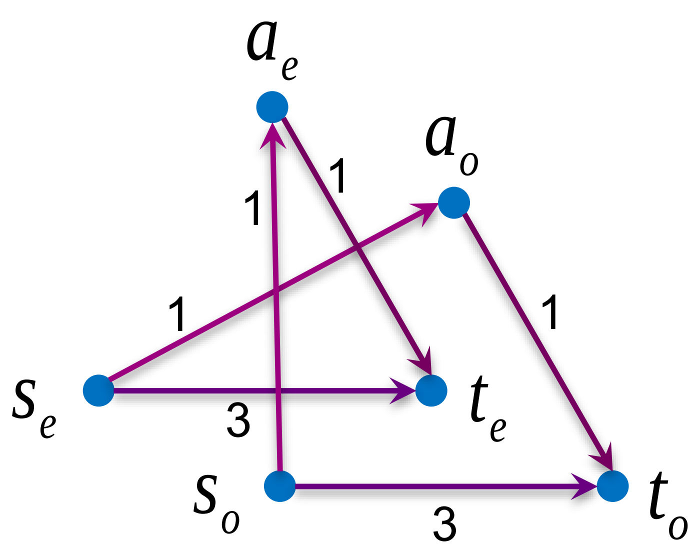
G'



המשך פתרון

- מה נחפש ב G' ?
- מסלול קל ביותר מ- s_e ל- t_e .
- זה בדיוק מסלול קצר ביותר ב G שעובר דרך מספר זוגי של קשתות אדומות.

G'



שאלה 1 – נכונות

- **טענה**: קיים ב-G מסלול $t \rightsquigarrow s :p$ עם מס' זוגי של קשתות אדומות במשקל w $\Leftrightarrow$ קיים ב-G' מסלול $p': s_e \rightsquigarrow t_e$ במשקל w.

- נסמן ב-$\tilde{\delta}(s,t)$ את משקל מסלול קל ביותר מ-s ל-t שמכיל מס' זוגי של קשתות אדומות. נקרא למסלול כזה 'זוגי'.
- $\delta(s_e,\mathrm{t_e}) \geq \tilde{\delta}(s,t)$: כי אם קיים מסלול במשקל $\delta(s_e,\mathrm{t_e})$ מ-s_e ל-t_e אז קיים ב-G מסלול זוגי במשקל זה מ-s ל-t .
- $\delta(s_e,\mathrm{t_e}) \leq \tilde{\delta}(s,t)$: כי אם קיים ב-$G$ מסלול זוגי במשקל $\tilde{\delta}(s,t)$ אז קיים ב-G' מסלול במשקל זה מ-s_e ל-$\mathrm{t_e}$.

שאלה 1 – המשך נכונות

- לכן, $\tilde{\delta}(s,t) = \delta(s_e,\mathrm{t_e})$ והאלג' יענה תשובה נכונה.
- צריך עדיין להוכיח את **הטענה**: קיים ב-G מסלול $p: s \rightsquigarrow t$ עם מס' זוגי של קשתות אדומות במשקל w $\Leftrightarrow$ קיים ב-G' מסלול $p': s_e \rightsquigarrow t_e$ במשקל w.

שאלה 1 – המשך נכונות

- כיוון $\Rightarrow$:
- יהי מסלול $s_e \to v_?^1 \to v_?^2 \ldots \to v_?^k \to t_e$ ב-G'.
- כל מסלול ב-G' שמתחיל ונגמר באותו צד מכיל מס' זוגי של קשתות "**מעבירות צד**".
- מהבניה קשת $u_? \to v_?$ ב-G' "**מעבירה צד**" אם $u \to v$ **קשת אדומה** ב-G.
- לכן $s \to v^1 \to v^2 \ldots \to v^k \to t$ הוא מסלול ב-G שמכיל מס' זוגי של קשתות אדומות, ובאותו משקל.

- כיוון $\Leftarrow$: תרגיל.

סיבוכיות

- בגרף החדש יהיו $2|V|$ קודקודים ו- $2|E|$ קשתות.
- נריץ עליו את האלג' של Dijskstra בסיבוכיות זמן $O(|V|\log|V|+|E|)$.

שאלה 2 – משקלים עם הגבלה

- **תרגיל:** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, קודקוד $s\in V$ ופונקציית משקל $w:E\to\{0,1,2\}$. תארו אלג' <u>יעיל</u> המוצא מק"בים מ- s.

פתרון פשוט אך לא יעיל

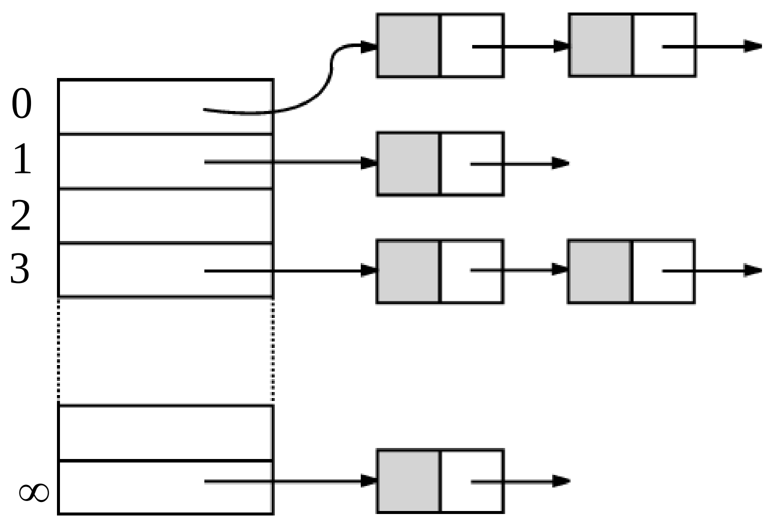
- נריץ את האלג' של Dijkstra מ- s.
- זמן ריצה – $O(|V|\log|V|+|E|)$.

איך נשפר את הפתרון?

- האלג' של Dijskstra מבצע:
  - אתחול בסיבוכיות $O(|V|)$.
  - $O(|V|)$ פעולות extract_min על תור העדיפויות.
  - $O(|E|)$ פעולות Relax, שיכולות גם לגרור עדכון של תור העדיפויות. פעולת Relax לוקחת זמן קבוע (לא כולל עדכון התור).
- בשימוש ב-Fibonacci heap, עדכון איבר לוקח זמן קבוע, והוצאת איבר $O(\log|V|)$.
- נשנה את התור כך שכל פעולה עליו תדרוש זמן קבוע, ונקבל אלגוריתם עם זמן ריצה ליניארי.

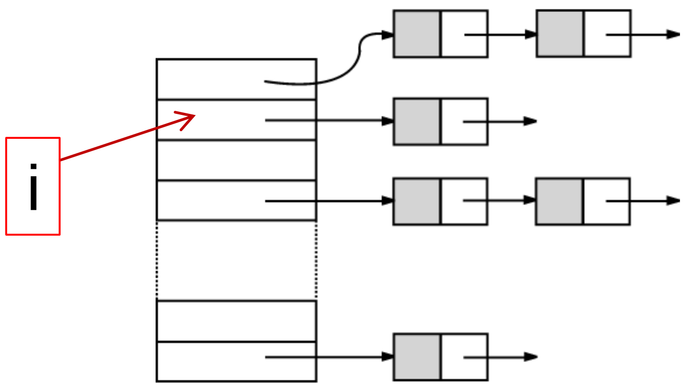
שיפור תור העדיפויות

- עקב ההגבלה על משקלי הקשתות, משקל כל מסלול יהיה בין 0 ל- $2(|V|-1)$ (או אינסוף).
- נחזיק מערך בגודל $2|V|$, כך שכל תא יתאים למשקל אפשרי של מק"ב. בכל תא תהיה רשימה מקושרת, כך שאיברי הרשימה בתא k יתאימו למסלולים במשקל k שאנו בוחנים בשלב זה.

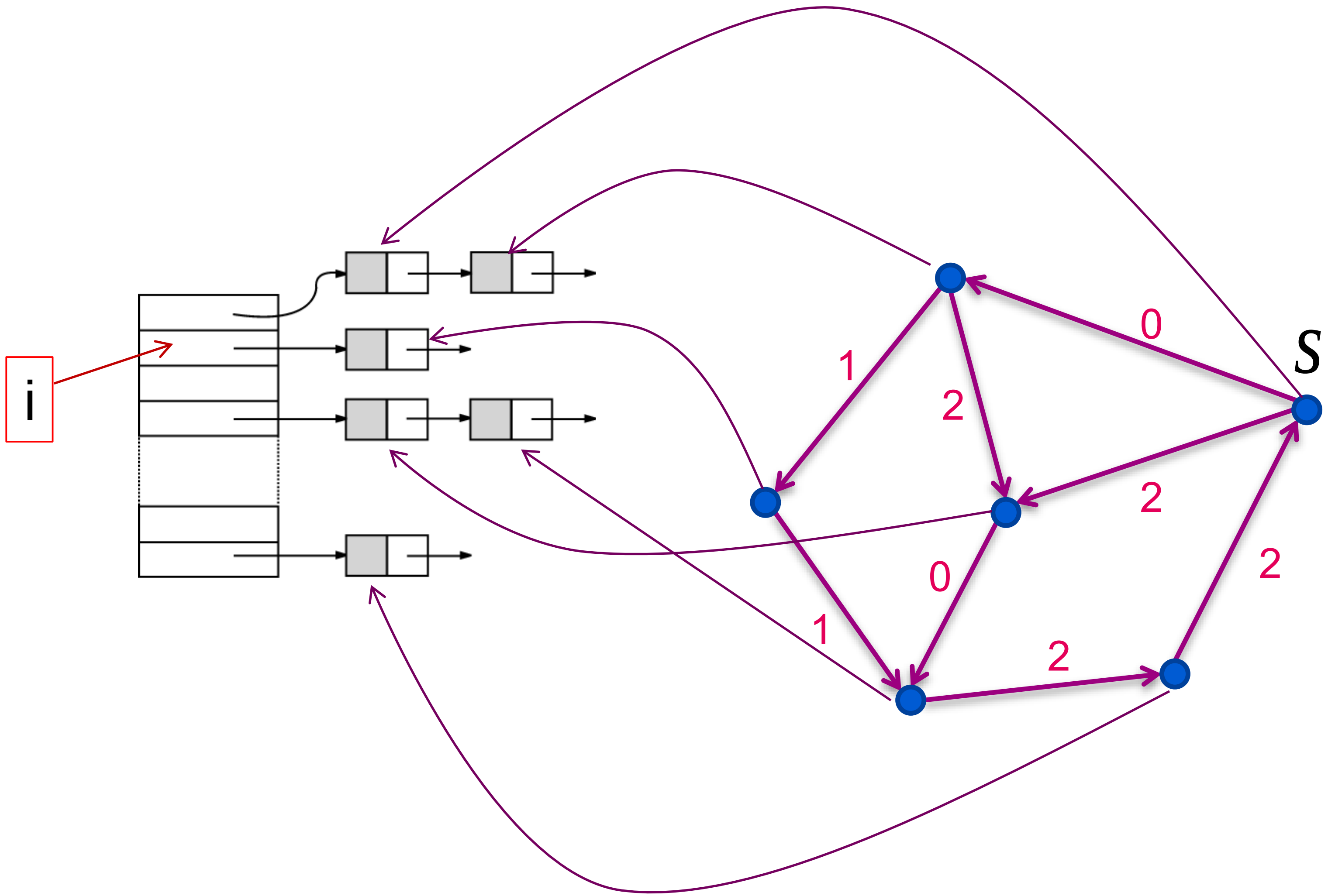


פעולות על תור העדיפויות

- הוצאת האיבר המינימאלי מהתור:
  - נחזיק משתנה אינדקס i של התא המינימאלי שאינו ריק במערך. בפעולת extract_min נוציא את האיבר שנמצא בראש הרשימה שבתא ה-i. הפעולה תיקח זמן קבוע (לא כולל זמן העדכון של i).
  - מספר התא המינימלי שאינו ריק - i, יכול רק לגדול, ולכן סך עלות העדכונים שלו היא $O(|V|)$.



עוד נקודת מבט



סיבוכיות

- סיבוכיות הזמן – $O(|V|+|E|)$.