תרגול 6 - BF

שאלה 1 – הדיקות מסי האיטרציות

- ***תרגיל:*** הראו שיתכן והאלגוריתם של בלמן-פורד זקוק ל - $n-1$ איטרציות בשביל לחשב מסלולים קצרים ביותר.

פתרון 1

- נזכר בתקציר האלגוריתם של Bellman-Ford (ללא בדיקת המעגלים השליליים):

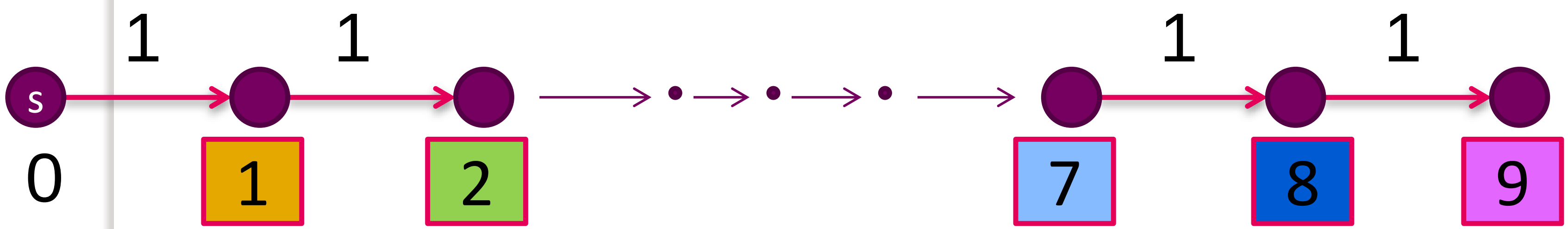
```
Bellman-Ford(G,s):
    Initialize(G).
    for i = 1 to |V|-1
        for each edge (u,v)
            if (d(v)>d(u)+w(u,v))
                Relax (u,v,w)
```

מספר האיטרציות

פתרון 1

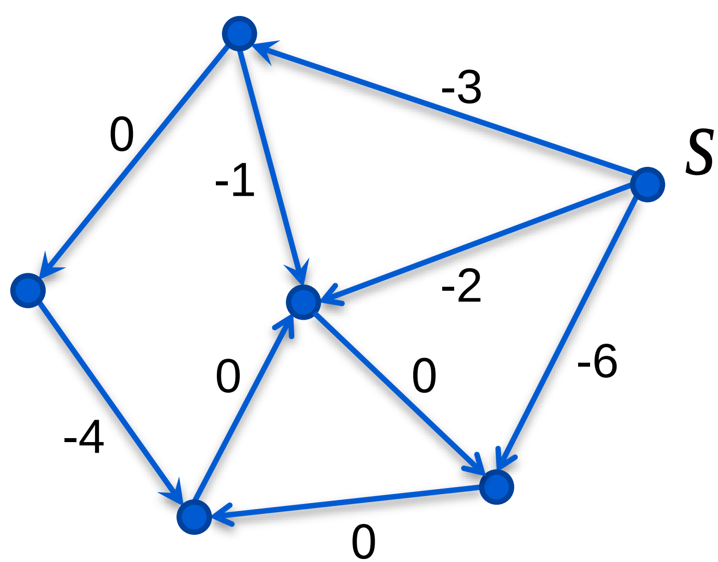
```
Bellman-Ford(G,s):
        Initialize(G).
        for i = 1 to |V|-1
            for each edge (u,v)
                    if (d(v)>d(u)+w(u,v))
                        Relax (u,v,w)
```

- הרצת Bellman-Ford:



שאלה 2 – גרף ללא משקלים חיוביים

- **תרגיל:** נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$, קודקוד $s\in V$, ופונקציית משקל אי-חיובית $w:E\rightarrow(-\infty,0]$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלג' למציאת **משקלי** מסלולים קלים ביותר מ- s אל שאר קודקודי הגרף.

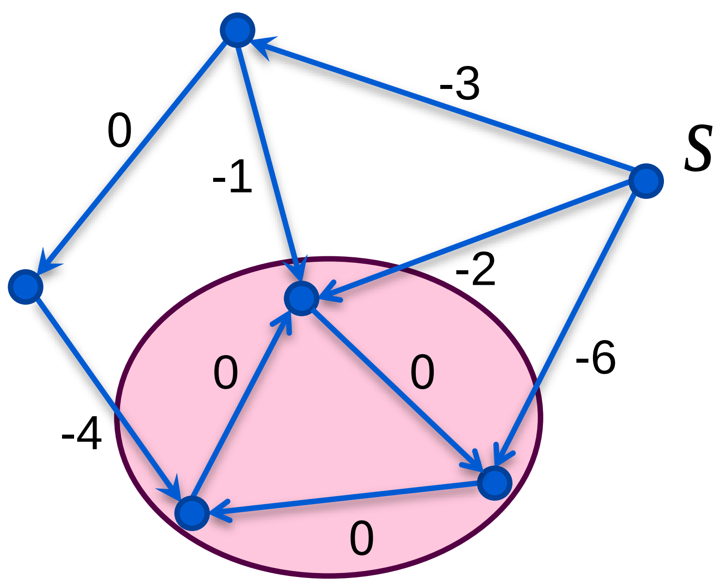


שאלה 2 – פתרון טריוויאלי

- נריץ Bellman-Ford מ- s .
- סיבוכיות: $O(|V|\cdot|E|)$.

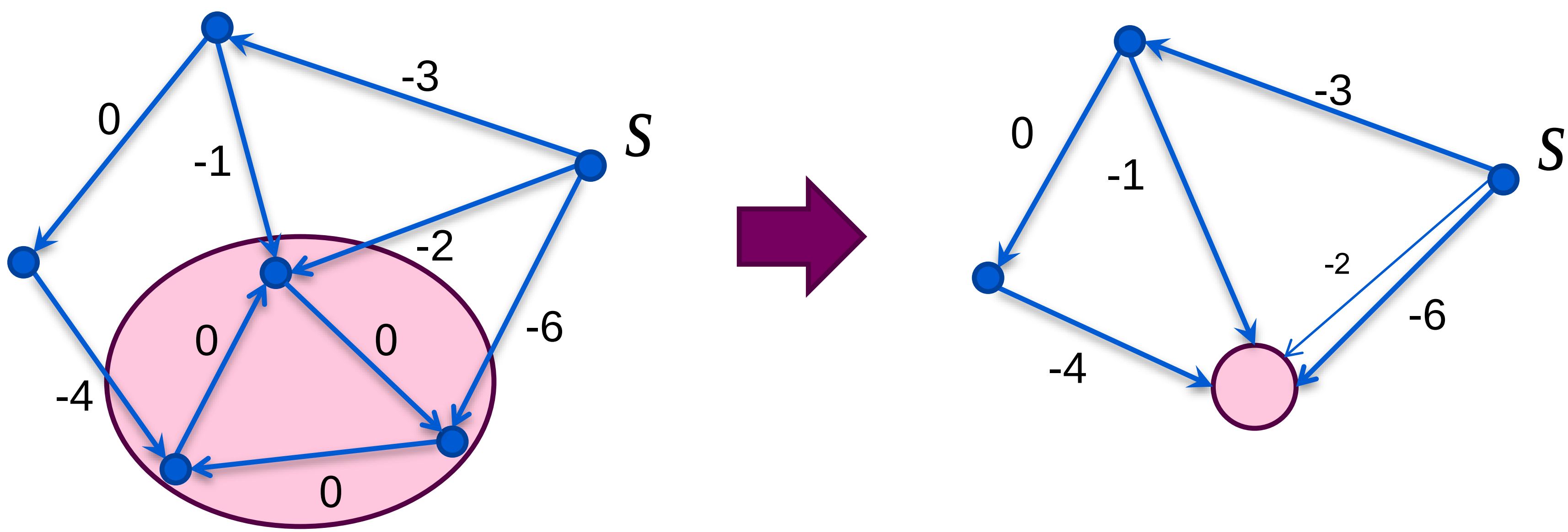
הבחנות

- האם יכול להיות מעגל בגרף?
  - כן, כשכל קשתות המעגל הן במשקל 0.
- מה ניתן להסיק מכך לגבי הרק"חים בגרף?
  - קשת שנמצאת בתוך רק"ח היא חלק ממעגל, ולכן משקלה 0.
  - לקודקודים באותו רק"ח יהיו מקב"ים באותו משקל.
- מספיק למצוא את המרחק של כל רק"ח מ- s.



פתרון

- האלגוריתם:
  - נבנה את גרף העל.
  - נמצא מסלולים קלים ביותר בגרף העל (עלות הטיול בתוך רק"ח היא 0 כיוון שזהו משקל כל הקשתות שבו).



סיבוכיות

- **סיבוכיות:**
  - ראינו בשיעור שניתן למצוא מסלולים קלים ביותר בגרף אציקלי בזמן ליניארי. לכן, האלגוריתם רץ בזמן ליניארי.

שאלה 2 – ארביטראגי

- ***תרגיל:*** נתונים n סוגי מטבעות וטבלת מחירי ההמרה ביניהם. תארו אלגוריתם הבודק **האם ניתן** להתחיל עם מטבע אחד מסוג i ולבצע סדרת המרות שבסופה נקבל יותר ממטבע אחד מסוג i.

שאלה 2 – דוגמא

$1 \times 22.3180 \times 0.0120 \times 0.7516 \times 4.9517 = 0.9967$

טבלת שערי חליפין של מטבעות חוץ

הוסיפו לאתרכם +

+1 1 Like 10

ILS	AUD	CAD	CHF	JPY	GBP	EUR	USD	מטבע
3.7099	0.9660	0.9983	0.9023	82.8690	0.6246	0.7496	1	USD
4.9517	1.2893	1.3318	1.2040	110.5600	0.8329	1	1.3341	EUR
5.9397	1.5472	1.5984	1.4444	132.7070	1	1.2003	1.6008	GBP
0.0448	0.0117	0.0120	0.0115	1	0.0075	0.0091	0.0121	JPY
4.1113	1.0703	1.1052	1	91.8330	0.6921	0.8305	1.1081	CHF
3.7199	0.9682	1	0.9040	83.0170	0.6262	0.7516	1.0027	CAD
3.8418	1	1.0326	0.9338	85.7560	0.6465	0.7760	1.0349	AUD
1	0.2603	0.2688	0.2432	22.3180	0.1684	0.2020	0.2695	ILS

שאלה 2 – רעיון

- נסמן את מספר המטבעות מסוג $\boldsymbol{a}$ שניתן לקבל בתמורה למטבע אחד מסוג $\boldsymbol{b}$ בתור $\boldsymbol{A(a,b)}$.
- נבנה גרף מכוון $G=(V,E)$. הגרף מכיל צומת עבור כל סוג מטבע, וקיימת קשת מכל צומת לכל צומת אחר.
- לקשת בגרף היוצאת מקודקוד שמתאים למטבע $\boldsymbol{a}$ ונכנסת לקודקוד שמתאים למטבע $\boldsymbol{b}$ ניתן משקל $\boldsymbol{A(a,b)}$.
- המשקל של מעגל $\boldsymbol{c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \ldots \rightarrow c_k \rightarrow c_1}$ יהיה

$$\boldsymbol{A(c_1,c_2)+A(c_2,c_3)+\cdots+A(c_k,c_1)}$$

  - אבל אנחנו מחפשים מעגל שמקיים

$$\boldsymbol{A(c_1,c_2)\cdot A(c_2,c_3)\cdot \ldots \cdot A(c_k,c_1) > 1}$$

שאלה 2 – תיקון הבעיה

- אנחנו מחפשים מעגל $c_1 \rightarrow c_2 \ \ldots \rightarrow c_k \rightarrow c_1$ כך שמתקיים $A(c_1,c_2) \cdot A(c_2,c_3) \cdot \ldots \cdot A(c_k,c_1) > 1$

$$\Updownarrow$$

$$\log A(c_1, c_2) + \log A(c_2, c_3) + \cdots + \log A(c_k, c_1) > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\log A(c_1, c_2) - \log A(c_2, c_3) - \cdots - \log A(c_k, c_1) < 0$$

- לקשת מ-c_i אל c_j ניתן משקל $-\log A(c_i, c_j)$.
- קיים רצף המרות שמביא לרווח אם"ם בגרף החדש יש מעגל שלילי.

שאלה 2 – המשך הפתרון

- נבדוק אם קיים מעגל $c_1 \to \cdots c_k \to c_1$ עבורו:
$$-\log A(c_1, c_2) - \log A(c_2, c_3) - \cdots - \log A(c_k, c_1) < 0$$

- לצורך כך נשתמש באלג' של Bellman-Ford, וכך נפתור את הבעיה בסיבוכיות זמן של
$O(|V| \cdot |E|) = O(n^3)$.

- הגרף קשיר בחוזקה, ולכן נוכל להריץ את Bellman-Ford מאיזו צומת שנרצה.

שאלה 3 - המסלול הקל לקודקוד

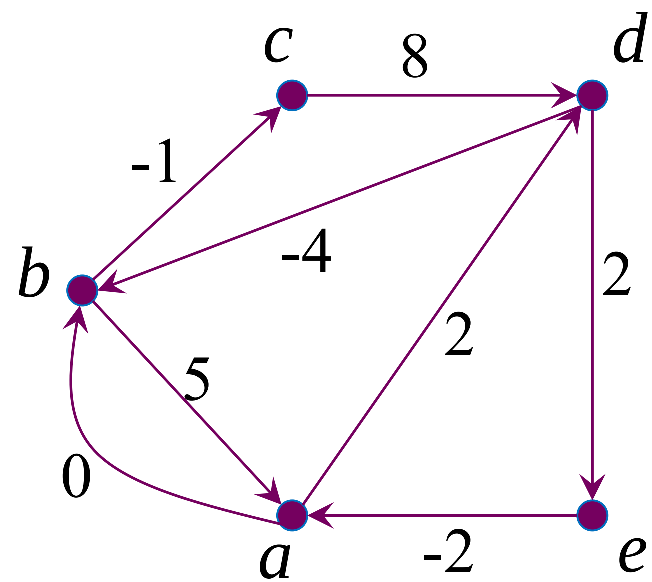
- **תרגיל:** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, ופונקצית משקל $w:E\rightarrow R$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. עבור כל קודקוד $v\in V$ נגדיר:

$$\delta^*(v)=\min_{u\in V}\delta(u,v)$$

(זהו משקל המסלול הקל ביותר מכל המסלולים שמסתיימים ב - v).

תארו אלגוריתם אשר מחשב את כל ערכי $\delta^*(v)$.

שאלה 3 - דוגמא



$$\delta^*(a) = -2$$

$$\delta^*(b) = -4$$

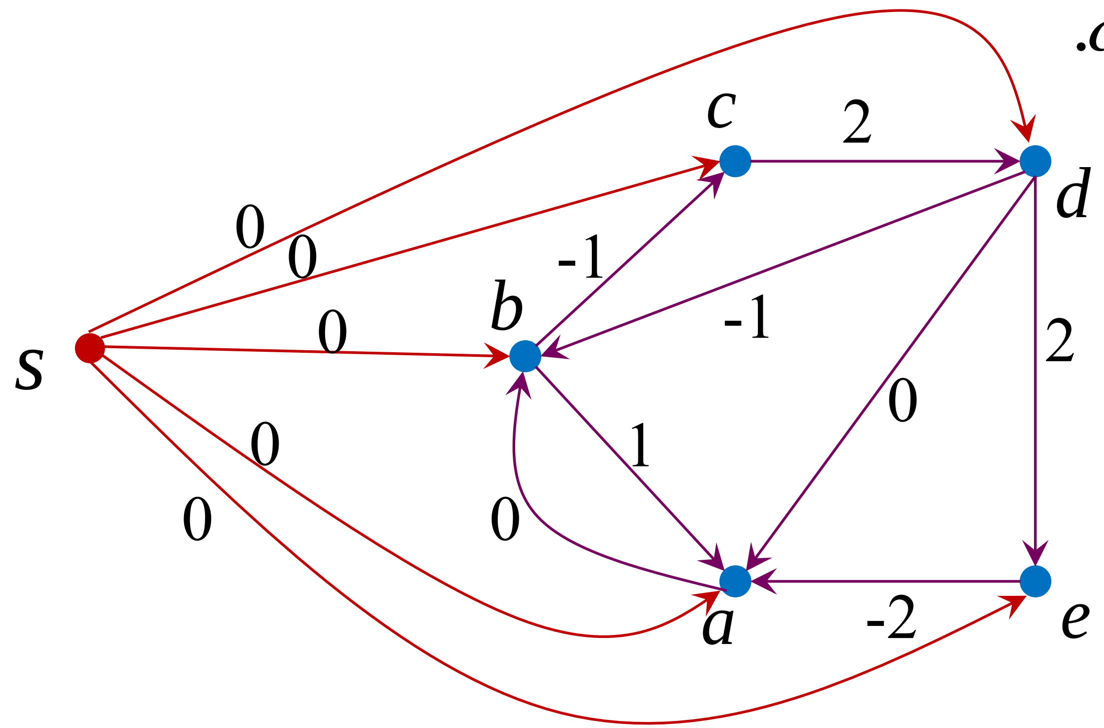
$$\delta^*(c) = -5$$

$$\delta^*(d) = 0$$

$$\delta^*(e) = 0$$

שאלה 3 - פתרון

- נוסיף קודקוד חדש s ונוציא ממנו קשתות במשקל 0 לכל שאר קודקודי הגרף.
- נריץ Bellman-Ford, ועבור כל קודקוד $v \in V$ נציב $\delta^*(v) = \delta(s,v)$.

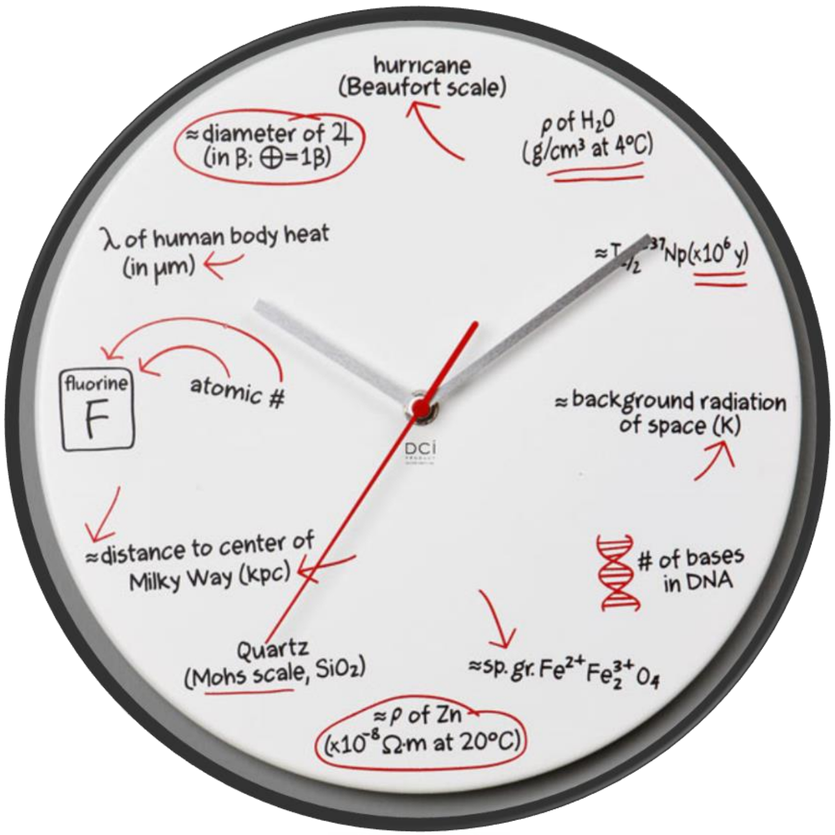


נכונות וזמן ריצה

- נכונות האלגוריתם:

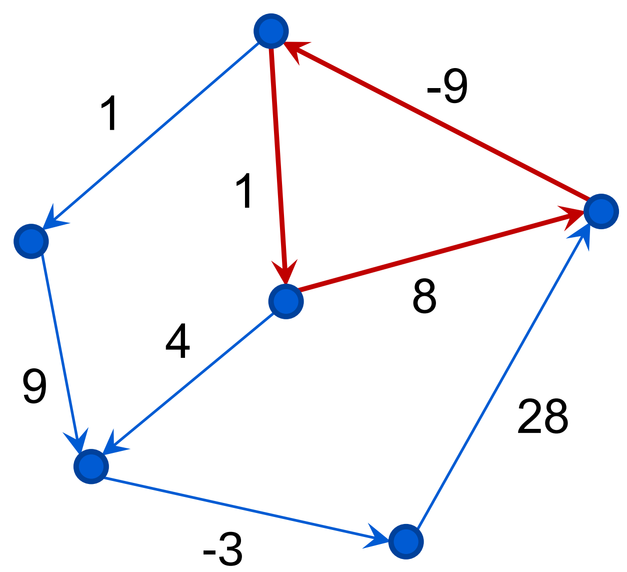
$$.\delta(s,v)=\min_u\left(w(s,u)+\delta(u,v)\right)=\min_u \delta(u,v)=\delta^*(v)$$

- זמן ריצה:
  - הוספת קודקוד לגרף – $.O(|V|)$
  - Bellman-Ford – $.O(|V|\cdot|E|)$
  - סה"כ - $.O(|V|\cdot|E|)$



שאלה 4 – מעגלים במשקל 0

- **תרגיל:** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, ופונקצית משקל $w:E\to R$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלג' שבודק האם קיים מעגל במשקל 0 בגרף.



שאלה 4 – פתרון

- **הגדרה:** נגיד שקשת $e = (u,v)$ היא **מהירה ביחס ל-s** אם היא מקיימת: $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$
וגם u וגם v נגישים מ-s.
- (נשים לב, תמיד מתקיים: $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v)$)

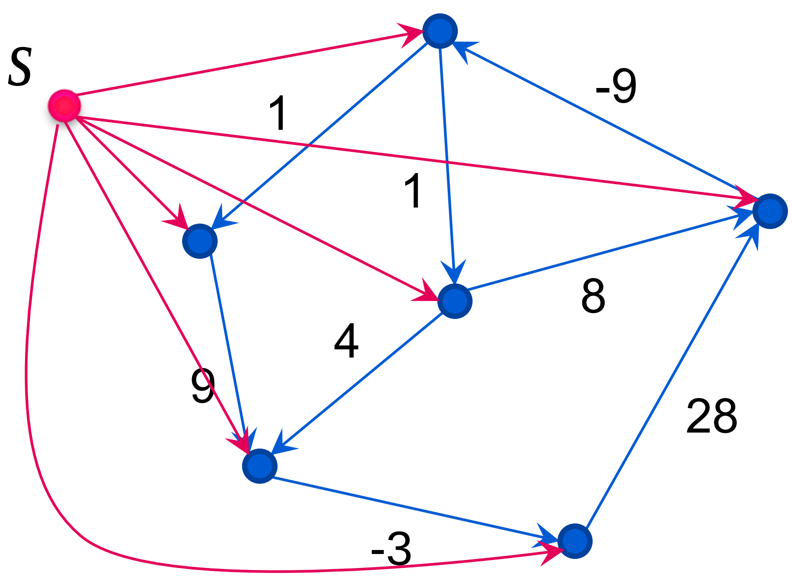
- **טענה:** הגרף G' שמכיל אותם צמתים כמו G אבל רק קשתות **מהירות ביחס ל-s** מקיים:
  - כל מסלול ב-G' שמתחיל ב-s הוא מק"ב ביחס ל-w
  - כל מק"ב מ-s שקיים ב-G קיים גם ב-G'

"גרף המק"בים מ-s"

- **הוכחה:** שיעורי בית.

שאלה 4 – פתרון

- בדומה לתרגיל הקודם, נוסיף קודקוד s , ועבור כל קודקוד $v \in V$ נוסיף קשת (s,v) במשקל 0.
- אבחנה: מעגל הוא חלק מאיזשהו מק"ב מ-s $\Leftrightarrow$ משקלו 0.
  - לכן, מעגל נמצא בגרף המק"בים מ-s $\Leftrightarrow$ משקלו 0.



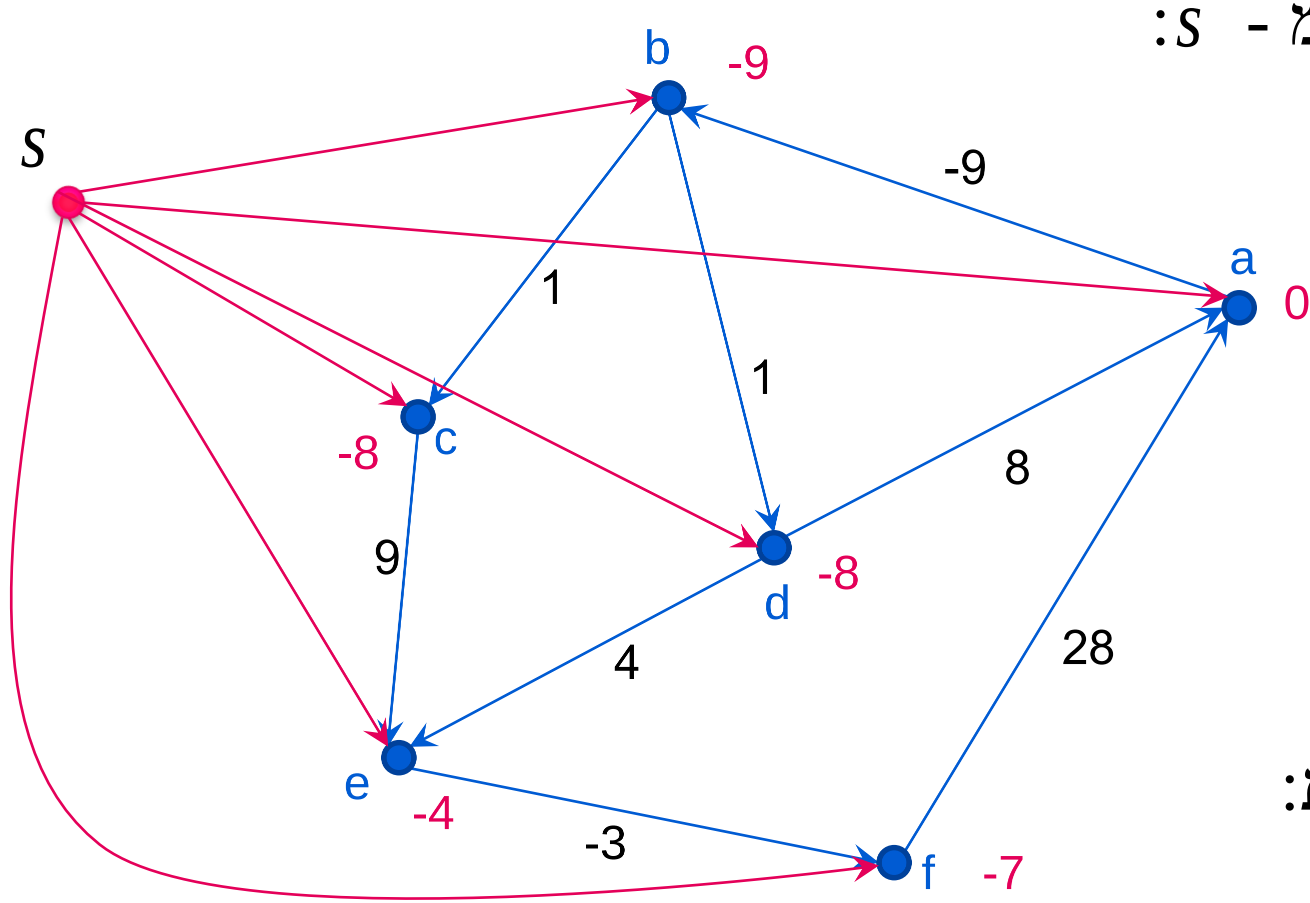
- נריץ Bellman-Ford מהצומת s.
- ניצור תת-גרף $G = (V,E')$, כאשר

$$E' = \{(u,v) \in E \;\; | \;\; \delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)\}$$

- כלומר G' מכיל רק קשתות מהירות ביחס ל-s, והוא גרף המק"בים מ-s.

שאלה 4 – פתרון

המרחקים מ - s:



נוריד קשתות:

המשך פתרון

- **טענה:** אם קיים ב- G' מעגל, אז בהכרח משקלו 0.
- **הוכחה:** נניח שקיים מעגל $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to v_1$,

אז

$$\delta(s,v_2) = w(v_1,v_2) + \delta(s,v_1)$$
$$\delta(s,v_3) = w(v_2,v_3) + \delta(s,v_2)$$
$$\vdots$$
$$\delta(s,v_1) = w(v_k,v_1) + \delta(s,v_k)$$

- נסכום את המשוואות ונקבל

$$0 = w(v_1,v_2) + w(v_2,v_3) + \ldots + w(v_k,v_1)$$

המשך פתרון

- **טענה 2:** מעגל במשקל 0 ב - G יהיה קיים גם ב - G'.
- **הוכחה:** נניח בשלילה ש $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$,
  מעגל במשקל 0 ב - G אבל לא ב -G'.

  אז לפחות אחד מהאי-שיוויונים הבאים הוא חזק:

$$\delta(s,v_2) \le \delta(s,v_1) + w(v_1,v_2)$$
$$\delta(s,v_3) \le \delta(s,v_2) + w(v_2,v_3)$$
$$\vdots$$
$$\delta(s,v_1) \le \delta(s,v_k) + w(v_k,v_1)$$

- נסכום את המשוואות ונקבל

$$0 < w(v_1,v_2) + w(v_2,v_3) + \ldots + w(v_k,v_1)$$

סיכום וזמן ריצה

- לסיכום, האלג' יראה כך:
  - נוסיף לגרף צומת s וקשתות היוצאות ממנה.
  - נריץ Bellman-Ford מ- s.
  - נזרוק את הקשתות שאינן חלק ממק"ב היוצא מ- s.
  - נבדוק האם קיים מעגל בתת הגרף שקיבלנו. למשל, על ידי DFS.

- כל השלבים פרט לשני לוקחים זמן לינארי. לכן, סיבוכיות זמן הריצה הינה הסיבוכיות של Bellman-Ford.