תרגול 5 - BF

שאלה 1 – הדיקות מסי האיטרציות

- **תרגיל:** הראו שיתכן והאלגוריתם של בלמן-פורד זקוק ל - $n-1$ איטרציות בשביל לחשב מסלולים קצרים ביותר.

פתרון 1

- נזכר בתקציר האלגוריתם של Bellman-Ford (ללא בדיקת המעגלים השליליים):

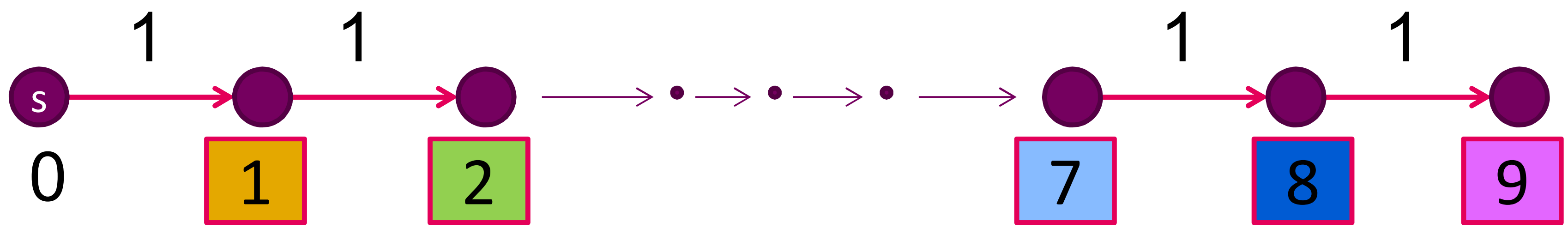
```
Bellman-Ford(G,s):
    Initialize(G).
    for i = 1 to |V|-1
        for each edge (u,v)
            if (d(v)>d(u)+w(u,v))
                Relax (u,v,w)
```

מספר האיטרציות

פתרון 1

```
Bellman-Ford(G,s):
        Initialize(G).
        for i = 1 to |V|-1
            for each edge (u,v)
                if (d(v)>d(u)+w(u,v))
                    Relax (u,v,w)
```

• הרצת Bellman-Ford:



שאלה 2 – ארביטראג'

- ***תרגיל:*** נתונים n סוגי מטבעות וטבלת מחירי ההמרה ביניהם. תארו אלגוריתם הבודק **האם ניתן** להתחיל עם מטבע אחד מסוג i ולבצע סדרת המרות שבסופה נקבל יותר ממטבע אחד מסוג i.

שאלה 2 – דוגמא

1 X 22.3180 X 0.0120 X 0.7516 X 4.9517 =0.9967

טבלת שערי חליפין של מטבעות חוץ

הוסיפו לאתרכם

+1 1 Like 10

ILS	AUD	CAD	CHF	JPY	GBP	EUR	USD	מטבע
3.7099	0.9660	0.9983	0.9023	82.8690	0.6246	0.7496	1	USD
4.9517	1.2893	1.3318	1.2040	110.5600	0.8329	1	1.3341	EUR
5.9397	1.5472	1.5984	1.4444	132.7070	1	1.2003	1.6008	GBP
0.0448	0.0117	0.0120	0.0115	1	0.0075	0.0091	0.0121	JPY
4.1113	1.0703	1.1052	1	91.8330	0.6921	0.8305	1.1081	CHF
3.7199	0.9682	1	0.9040	83.0170	0.6262	0.7516	1.0027	CAD
3.8418	1	1.0326	0.9338	85.7560	0.6465	0.7760	1.0349	AUD
1	0.2603	0.2688	0.2432	22.3180	0.1684	0.2020	0.2695	ILS

שאלה 2 – רעיון

- נסמן את מספר המטבעות מסוג c_j שניתן לקבל בתמורה למטבע אחד מסוג c_i בתור $a_{i,j}$.
- נבנה גרף מכוון $G=(V,E)$. הגרף מכיל צומת עבור כל סוג מטבע, וקיימת קשת מכל צומת לכל צומת אחרת.
- לקשת בגרף היוצאת מקודקוד c_i ונכנסת לקודקוד c_j ניתן משקל $a_{i,j}$.
- המשקל של מעגל $c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_k \to c_1$ יהיה $a_{1,2}+a_{2,3}+\ldots+a_{k,1}$.

אבל אנחנו מחפשים מעגל שמקיים $a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot\ldots\cdot a_{k,1}>1$.

שאלה 2 – תיקון הבעיה

- אנחנו מחפשים מעגל $c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_k \to c_1$, כך שמתקיים $a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot \ldots \cdot a_{k,1} > 1$.

$$\Updownarrow$$

$$\log a_{1,2} + \log a_{2,3} + \ldots + \log a_{k,1} > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\log a_{1,2} - \log a_{2,3} - \ldots - \log a_{k,1} < 0$$

- לקשת מ- c_i אל c_j ניתן משקל $-\log a_{i,j}$.
- קיים רצף המרות שמביא לרווח אם"ם בגרף החדש יש מעגל שלילי.

שאלה 2 – המשך הפתרון

- אנחנו לבדוק אם קיים מעגל $a_1 \to \quad a_k \to a_1$ עבורו:
  $-\log a_{1,2} - \log a_{2,3} - \dots - \log a_{k,1} < 0$.
- לצורך כך, נשתמש באלג' של Bellman Ford, וכך נפתור את הבעיה בסיבוכיות זמן של
  $O(|V| \cdot |E|) = O(n^3)$.
- הגרף קשיר בחוזקה, ולכן נוכל להריץ את Bellman-Ford מאיזו צומת שנרצה.

שאלה 3 - המסלול הקל לקודקוד

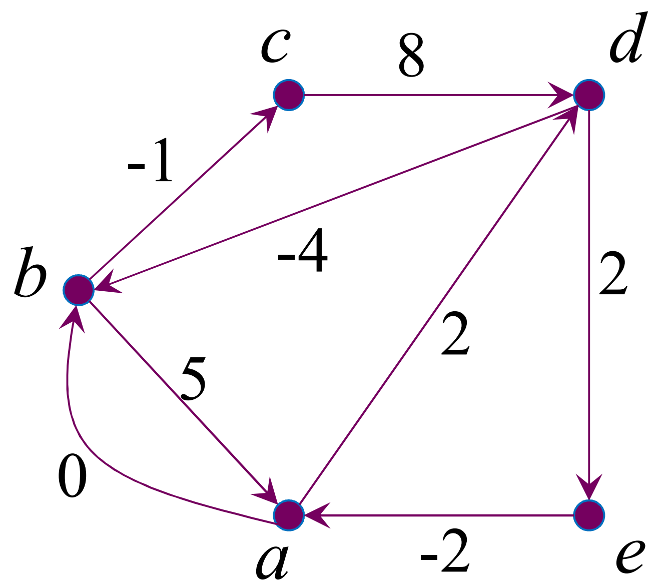
- **תרגיל:** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, ופונקצית משקל $w:E\to R$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. עבור כל קודקוד $v\in V$ נגדיר:

$$\delta^*(v)=\min_{u\in V}\delta(u,v)$$

(זהו משקל המסלול הקל ביותר מכל המסלולים שמסתיימים ב - v).

תארו אלגוריתם אשר מחשב את כל ערכי $\delta^*(v)$.

שאלה 3 - דוגמא



$$\delta^*(a) = -2$$

$$\delta^*(b) = -4$$

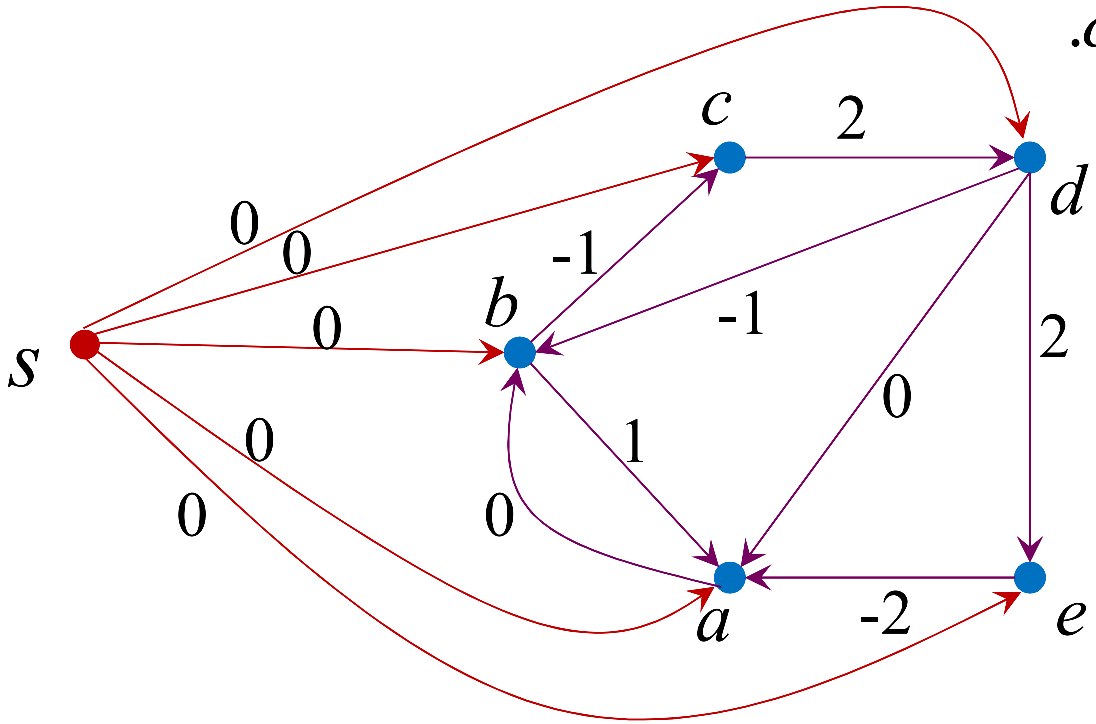
$$\delta^*(c) = -5$$

$$\delta^*(d) = 0$$

$$\delta^*(e) = 0$$

שאלה 3 - פתרון

- נוסיף קודקוד חדש s ונוציא ממנו קשתות במשקל 0 לכל שאר קודקודי הגרף.
- נריץ Bellman-Ford, ועבור כל קודקוד $v \in V$ נציב $\delta^*(v) = \delta(s,v)$.



•

נכונות וזמן ריצה

- נכונות האלגוריתם:

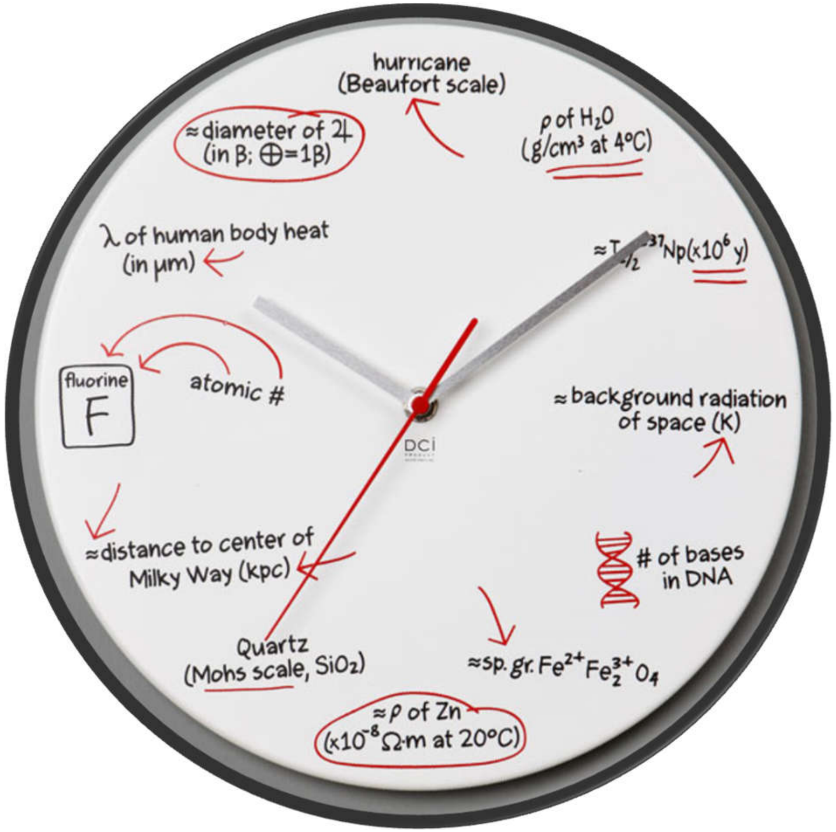
$$\delta(s,v)=\min_u\left(w(s,u)+\delta(u,v)\right)=\min_u \delta(u,v)=\delta^*(v).$$

- זמן ריצה:

הוספת קודקוד לגרף – $O(|V|)$.

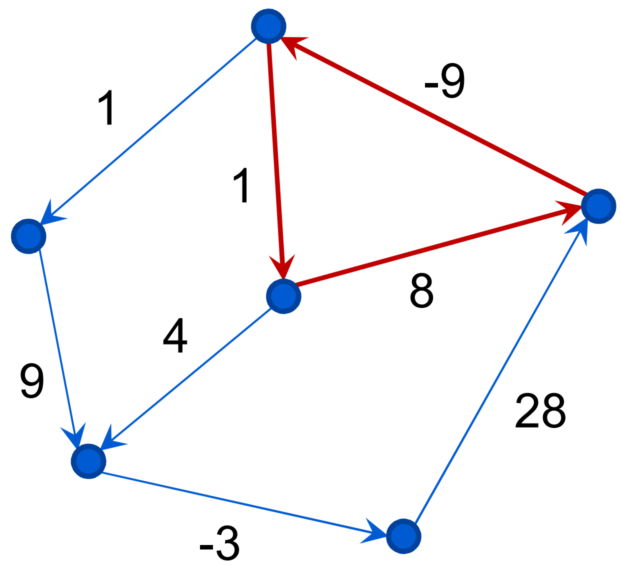
Bellman-Ford – $O(|V|\cdot|E|)$.

סה"כ - $O(|V|\cdot|E|)$.



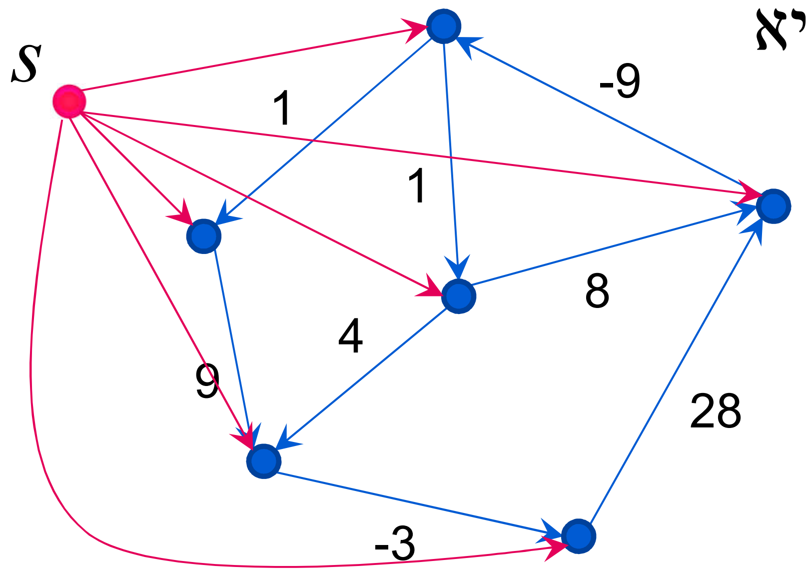
שאלה 4 – מעגלים במשקל 0

- **תרגיל:** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, ופונקצית משקל $w:E\rightarrow R$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלג' שבודק האם קיים מעגל במשקל 0 בגרף.



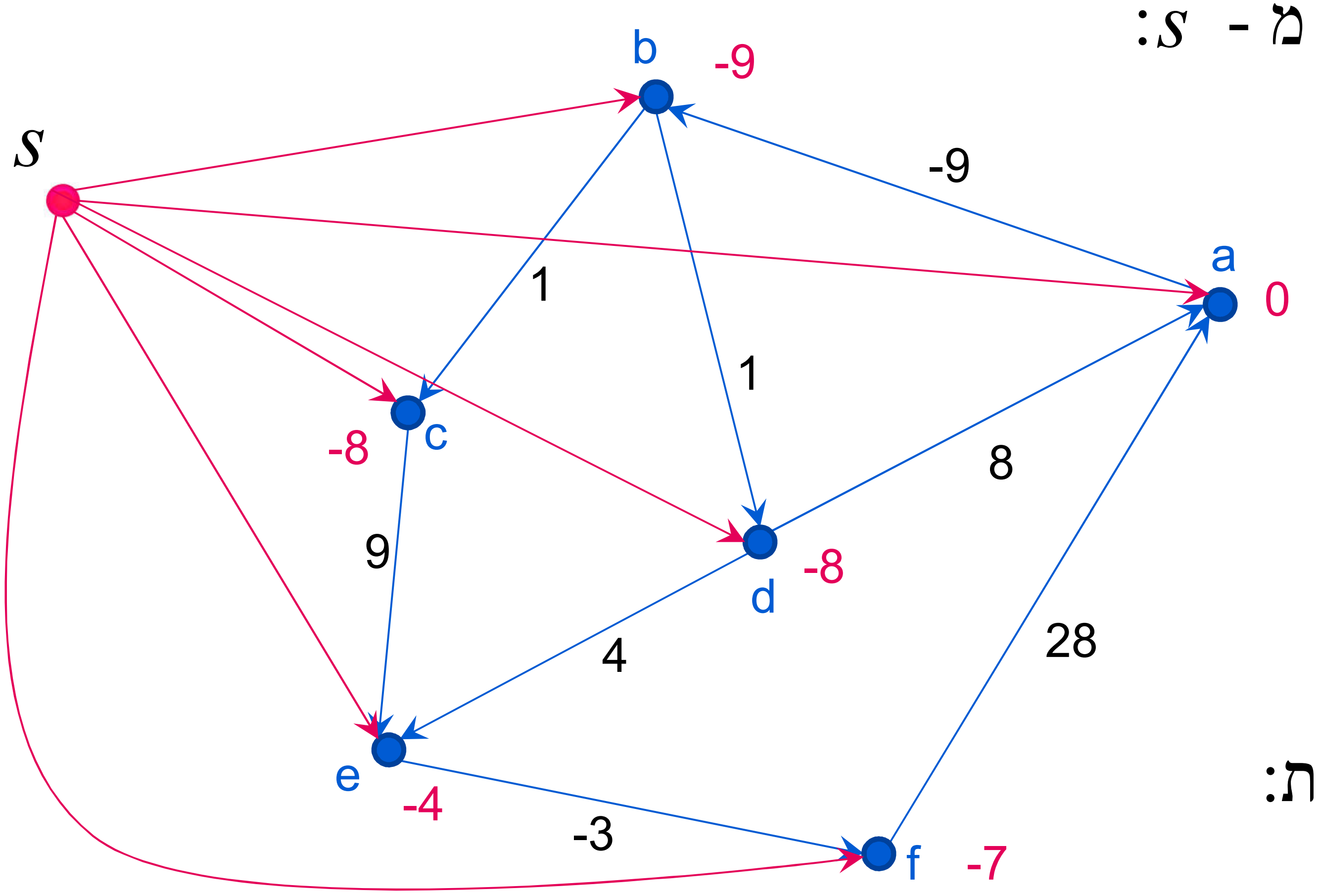
שאלה 4 – פתרון

- בדומה לתרגיל הקודם, נוסיף קודקוד s , ועבור כל קודקוד $v \in V$ נוסיף קשת (s,v) במשקל 0.
- נריץ Bellman-Ford מהצומת s.
- ניצור תת-גרף $G'=(V,E')$, כאשר $E'=\{(u,v)\in E \mid \delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v)\}$.
- במילים, קשת נשארת בגרף אמ"מ היא חלק ממק"ב היוצא מ- s. (גרף המסלולים הקלים ביותר מ- s).



שאלה 4 – פתרון

המרחקים מ - s:



נוריד קשתות:

המשך פתרון

- **טענה:** אם קיים ב- G' מעגל, אז בהכרח משקלו 0.
- **הוכחה:** נניח שקיים מעגל $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to v_1$,

אז

$$\delta(s,v_2) = w(v_1,v_2) + \delta(s,v_1)$$
$$\delta(s,v_3) = w(v_2,v_3) + \delta(s,v_2)$$
$$\vdots$$
$$\delta(s,v_1) = w(v_k,v_1) + \delta(s,v_k)$$

- נסכום את המשוואות ונקבל

$$0 = w(v_1,v_2) + w(v_2,v_3) + \ldots + w(v_k,v_1)$$

המשך פתרון

- **טענה 2:** מעגל במשקל 0 ב - G יהיה קיים גם ב - G'.
- **הוכחה:** נניח בשלילה ש $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$,
מעגל במשקל 0 ב - G אבל לא ב -G'.
אז לפחות אחד מהאי-שיוויונים הבאים הוא חזק:

$$\begin{aligned}
&\delta(s,v_2) \le \delta(s,v_1) + w(v_1,v_2) \\
&\delta(s,v_3) \le \delta(s,v_2) + w(v_2,v_3) \\
&\vdots \\
&\delta(s,v_1) \le \delta(s,v_k) + w(v_k,v_1)
\end{aligned}$$

- נסכום את המשוואות ונקבל

$$0 < w(v_1,v_2) + w(v_2,v_3) + \ldots + w(v_k,v_1)$$

•

סיכום וזמן ריצה

- לסיכום, האלג' יראה כך:

  נוסיף לגרף צומת s וקשתות היוצאות ממנה.

  נריץ Bellman-Ford מ- s.

  נזרוק את הקשתות שאינן חלק ממק"ב היוצא מ- s.

  נבדוק האם קיים מעגל בתת הגרף שקיבלנו. למשל, על ידי DFS.

- כל השלבים פרט לשני לוקחים זמן לינארי. לכן, סיבוכיות זמן הריצה הינה הסיבוכיות של Bellman-Ford.