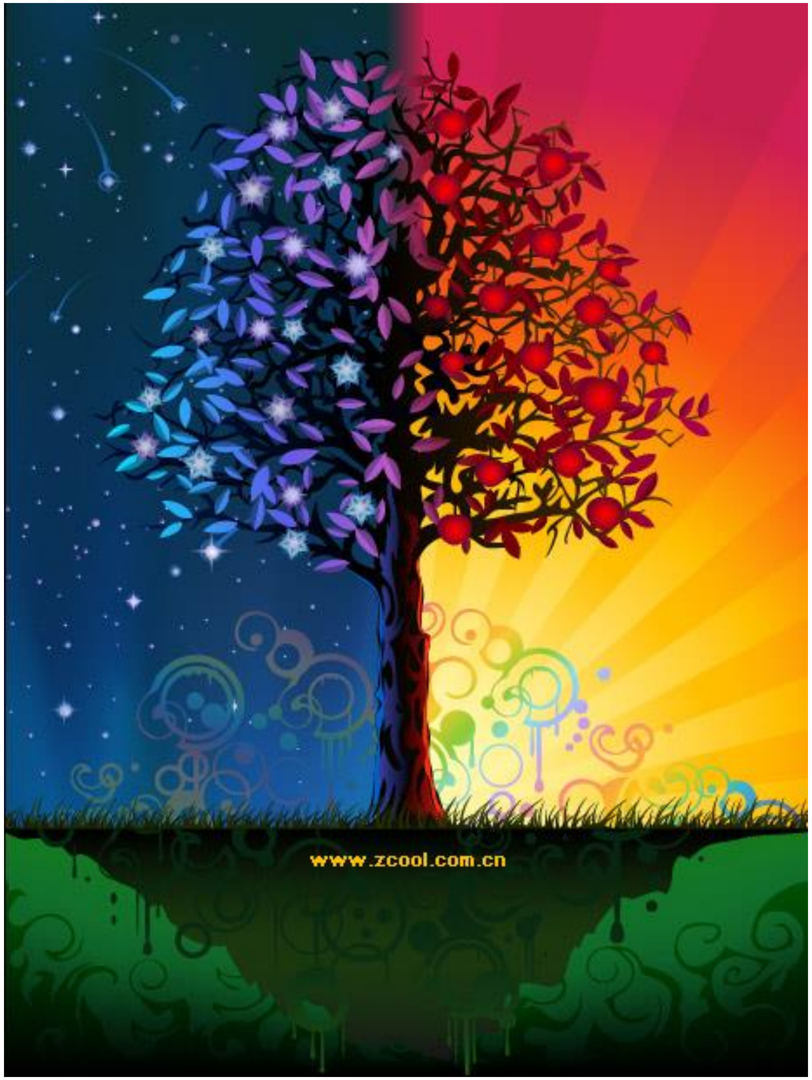
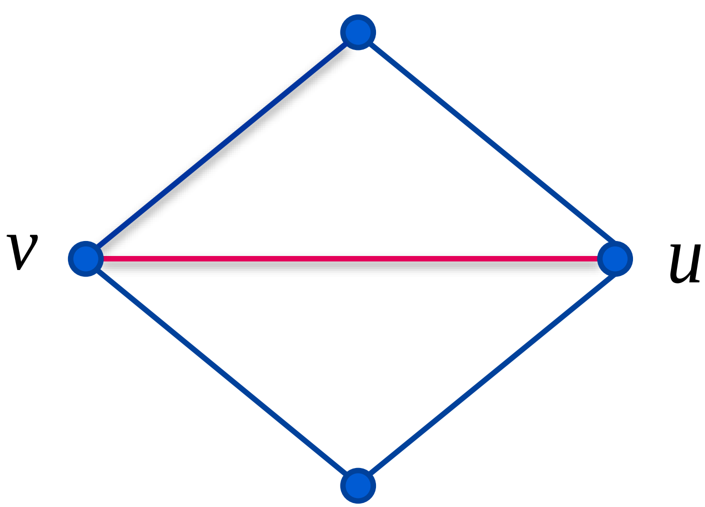
תרגול 4 – עפיימים



תכונה כללית של עצים

- ***טענה:*** אם נוסיף קשת לעץ פורש, היא תסגור <u>מעגל יחיד</u>.
- ***הוכחה:***
  - נסמן את הקשת שהוספנו בתור (v,u). היות שבעץ כבר היה מסלול בין v לבין u, הקשת בהכרח תסגור מעגל.
  - אם הקשת סוגרת שני מעגלים, נוכל ליצור מעגל מקשתות שני המעגלים, ללא (v,u). בסתירה לכך שמדובר בעץ.

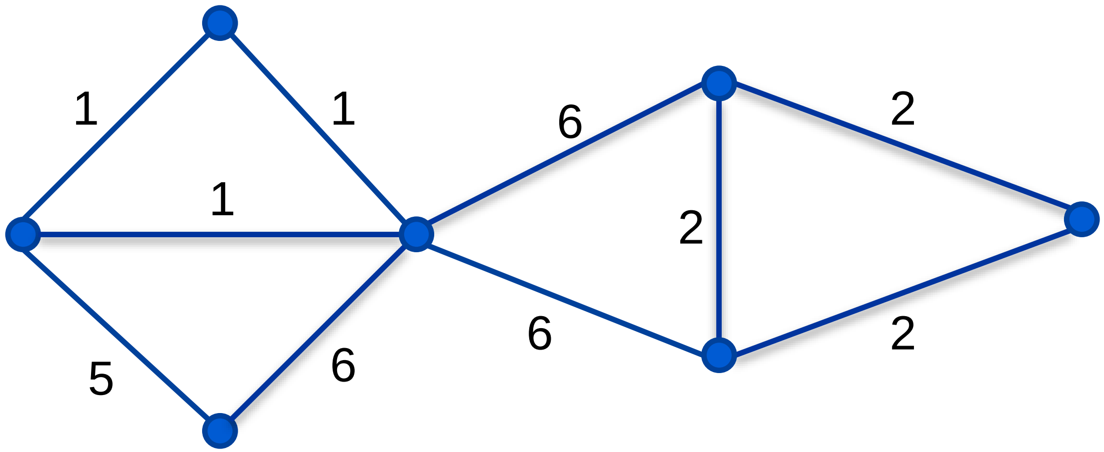


שאלה 1 – תכונות של עפ"מים

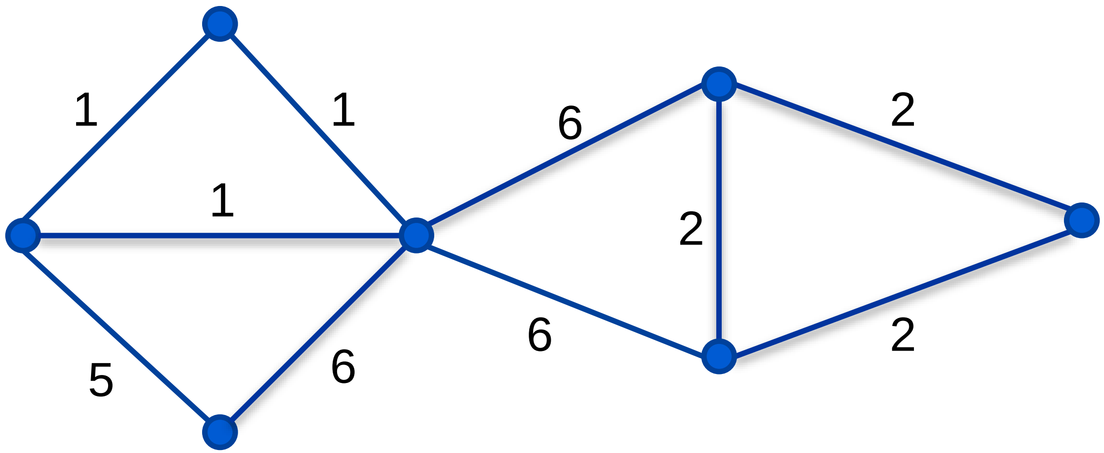
- **תרגיל:** נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, פונקצית משקל $w: E \to R$, ושני עפ"מים T_1, T_2.
הוכיחו שהטענה הבאה מתקיימת עבור כל מספר ממשי:
תהי $E_{1,r}$ קבוצת הקשתות של T_1 שמשקלן לכל היותר r.
הקבוצה $E_{2,r}$ מוגדרת באופן סימטרי. הגרפים $(V, E_{1,r})$ ו- $(V, E_{2,r})$ מחזיקים בדיוק באותם רכיבי קשירות.

שאלה 1 – דוגמא

T_1

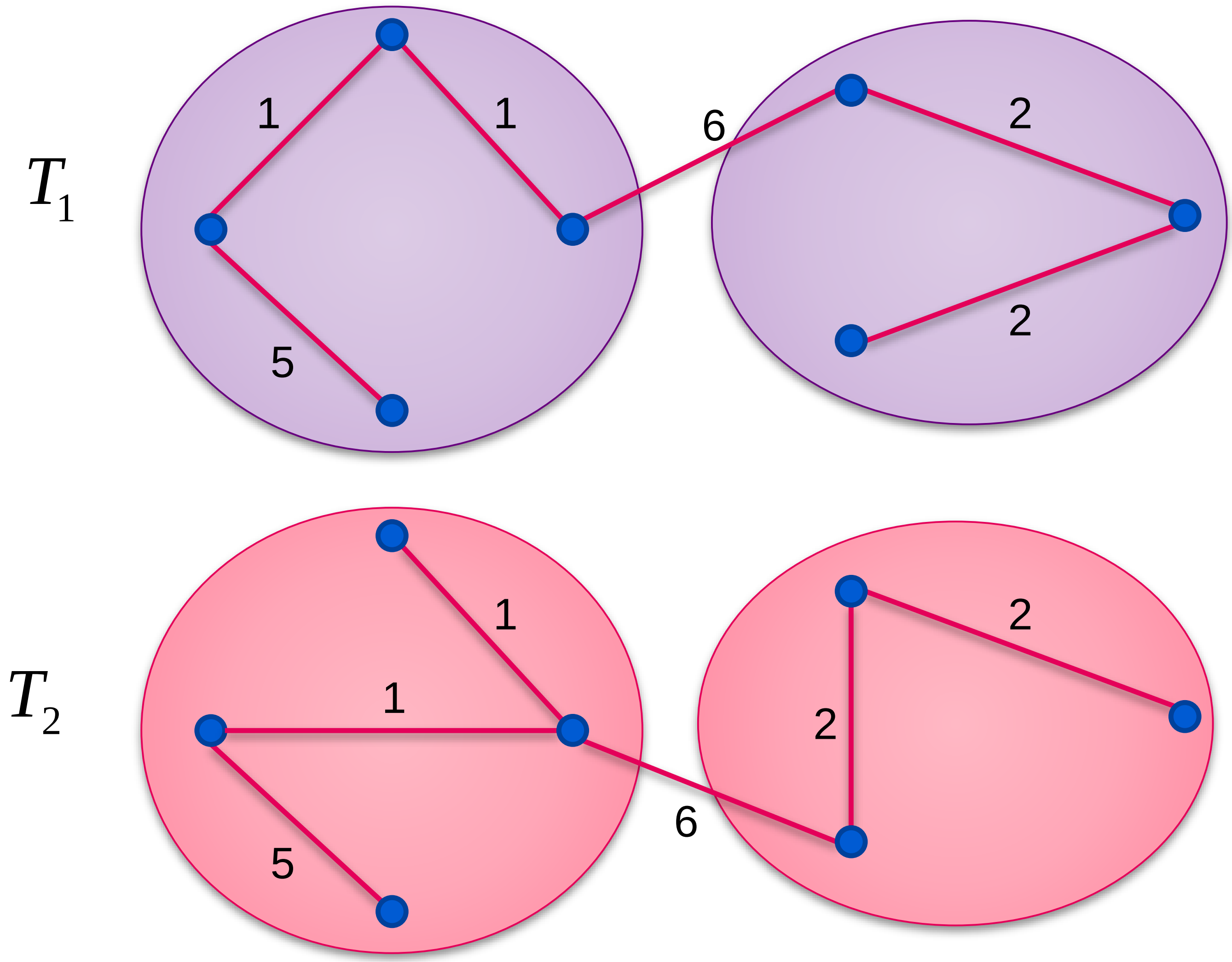


T_2

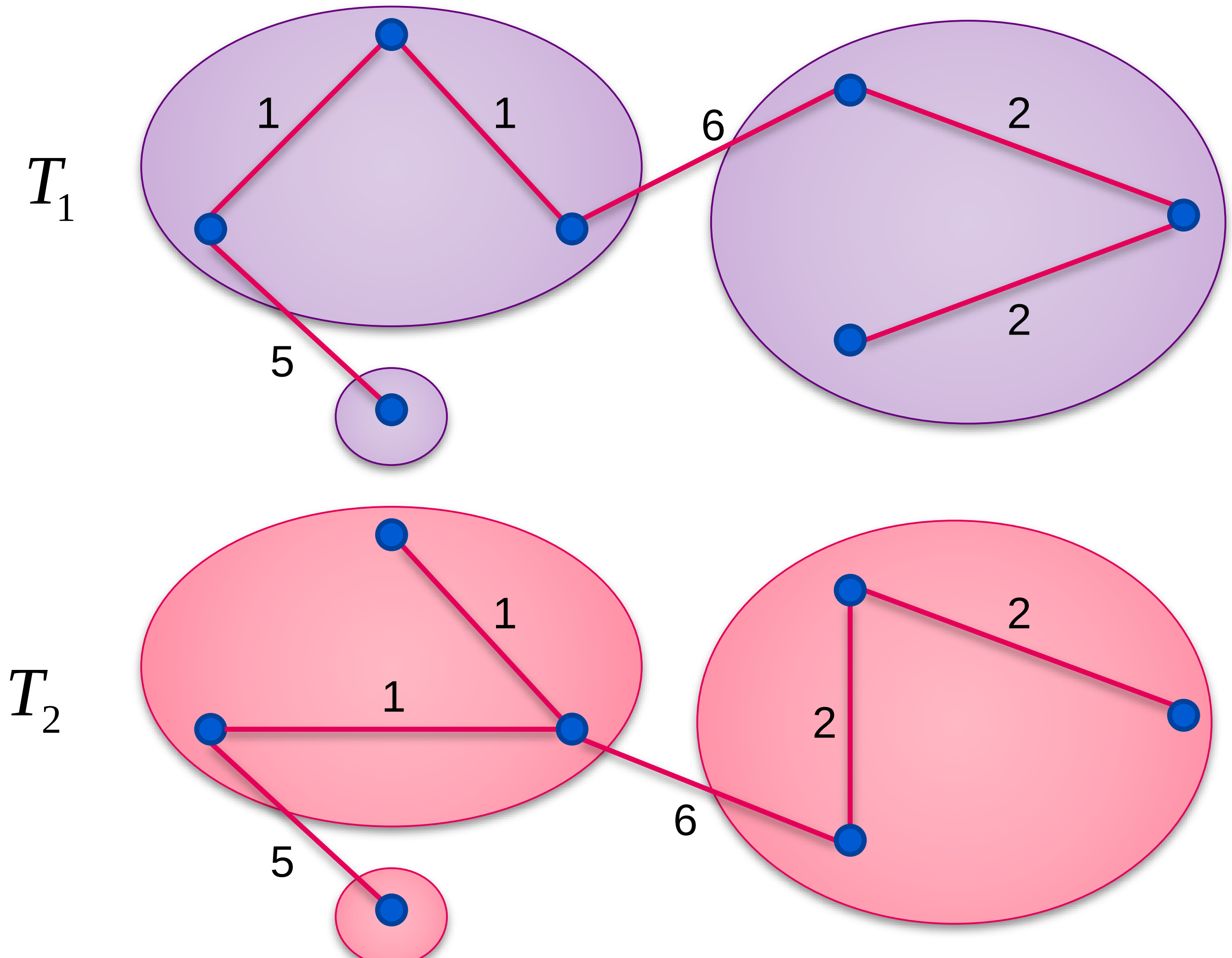


שאלה 1 – דוגמא

$r = 5$



שאלה 1 – דוגמא



$r = 3$

שאלה 1 – פתרון

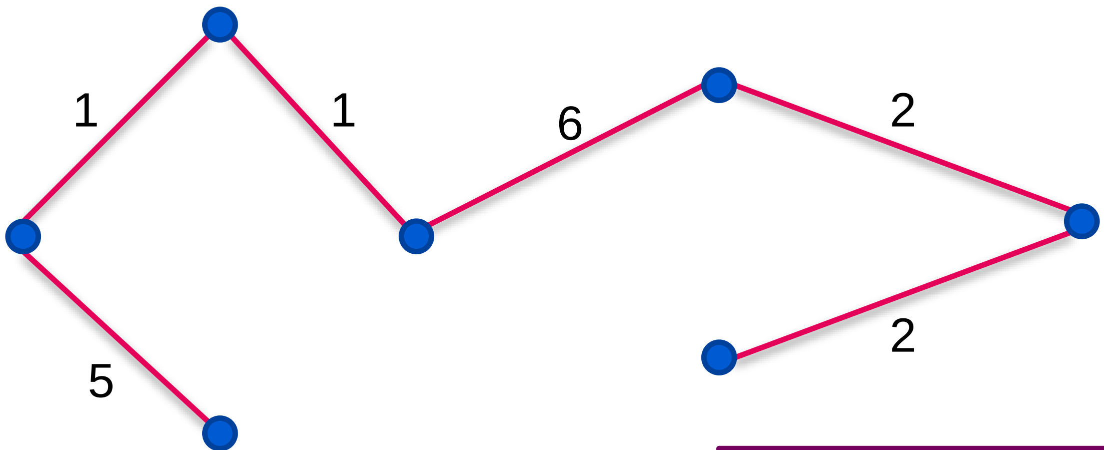
- נניח בשלילה שקיימים r ושני עפ"מים T_1,T_2 כך שרכיבי הקשירות של $G_1=(V,E_{1,r})$ ושל $G_2=(V,E_{2,r})$ שונים:
  - קיימים שני קודקודים u,v הנמצאים באותו רכיב קשירות בגרף אחד, וברכיבים שונים בגרף השני.
  - בה"כ נניח שהם באותו רכיב קשירות ב-G_1 וברכיבים שונים ב-G_2.
  - לכן, קיים מסלול **בגרף** מ-u ל-v במשתמש רק בקשתות במשקל $\geq$ r.
  - **במסלול** ב-T_2 מ-u ל-v בהכרח יש קשת במשקל $< r$.
  - אם נסיר קשת זו מ-T_2 נקבל שני רכיבי קשירות.
  - בגרף בהכרח קיימת קשת בין רכיבי הקשירות האלה, ממשקל $\geq r$.
  - לכן אם נחליף בין שתי הקשתות הנ"ל נקבל עץ פורש במשקל קטן יותר.
  - בסתירה להיות T_2 עפ"מ.

שאלה 2 - רשימות משקלים

- **תרגיל:** נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w:E\to R$, ושני עפ"מים T_1,T_2.
  תהי $\alpha_1\le\alpha_2\le\ldots\le\alpha_{n-1}$ רשימה ממוינת של משקלי קשתות T_1. באופן דומה, תהי $\beta_1\le\beta_2\le\ldots\le\beta_{n-1}$ רשימה ממוינת של משקלי קשתות T_2. הוכיחו שמתקיים $\forall i:\alpha_i=\beta_i$.

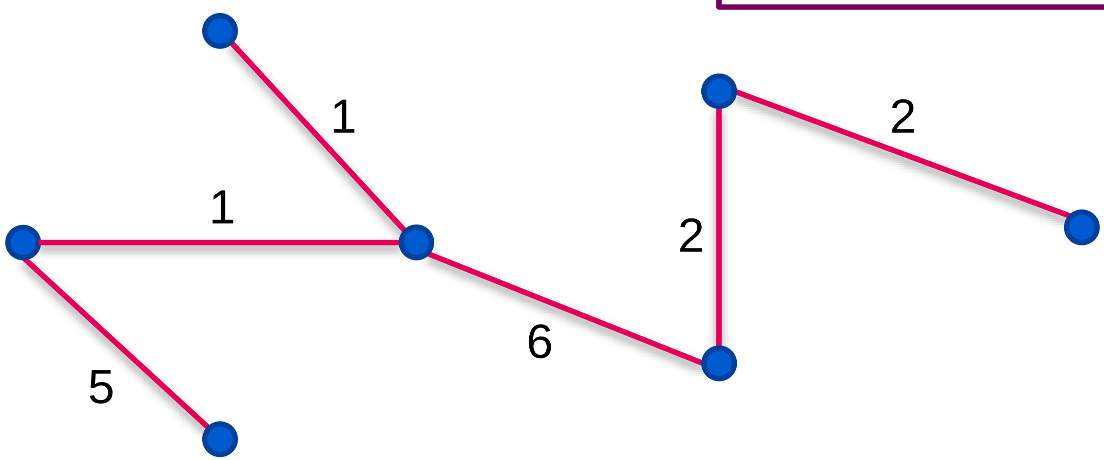
שאלה 2 – דוגמא (על הגרף משאלה 1)

T_1



משקלי הקשתות : 1,1,2,2,5,6

T_2



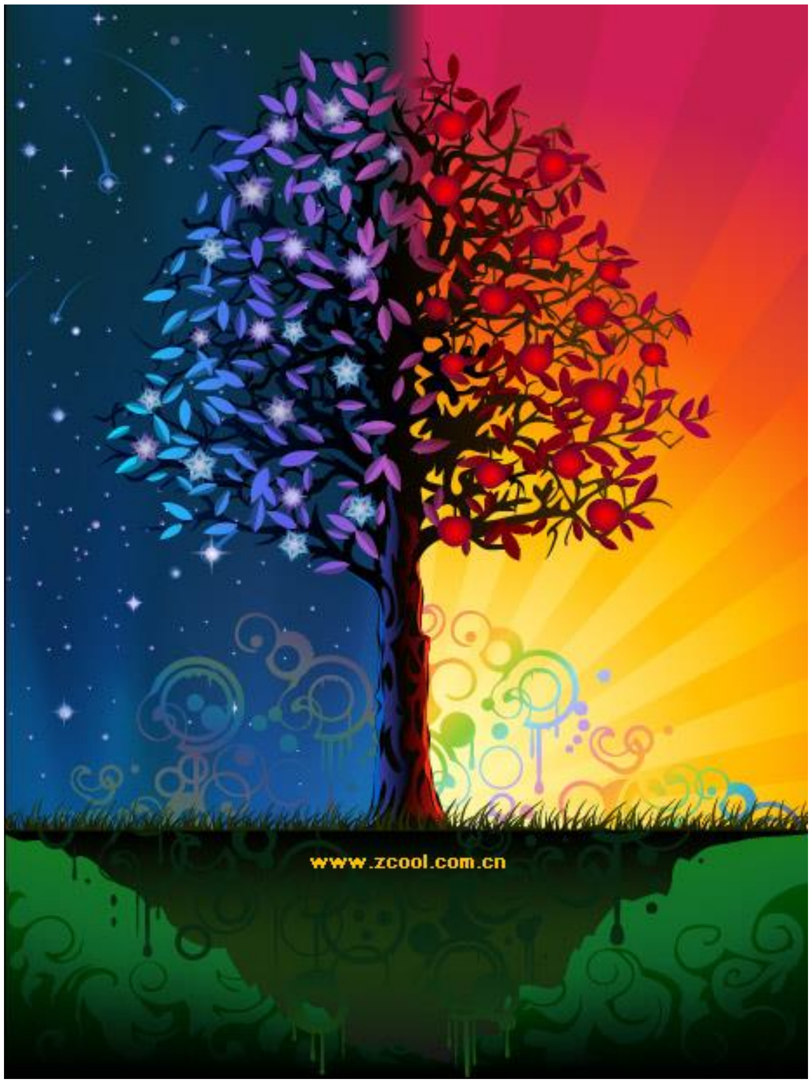
שאלה 2 – פתרון

- תהי $W=\{w_1,w_2,...\}$ רשימה ממוינת של המשקלים בגרף. נוכיח את הטענה באינדוקציה עבור המשקלים שאינם גדולים מ- w_i :
  - בסיס האינדוקציה – נראה שבשני העצים יש אותו מספר קשתות במשקל w_1.
  - מהשאלה הקודמת עם $r=w_1$, עבור שני העצים, הקשתות במשקל זה יוצרות את אותם רכיבי קשירות. לכן, מספר הקשתות זהה.

שאלה 2 – פתרון

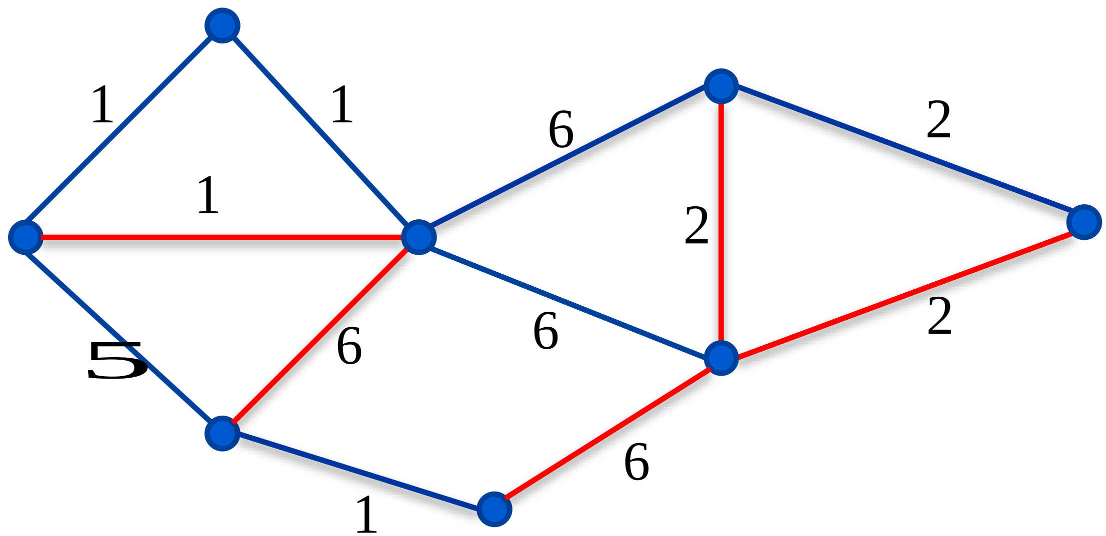
- צעד האינדוקציה – נניח שרשימות המשקלים זהות עד האיברים בגודל w_{i-1}, ונראה שיש בשני העצים אותו מספר של קשתות במשקל w_i:
  - לפי השאלה הקודמת עם $r = w_i$, אם נזרוק את הקשתות שגדולות ממשקל זה, נקבל בשני העצים את אותם רכיבי הקשירות.
  - זאת אומרת שיש בשני העצים אותו מספר קשתות במשקל $\geq w_i$. (כי בעץ עם k קודקודים יש $k-1$ קשתות.)
  - מהנחת האינדוקציה, יש בשני העצים אותו מספר קשתות עם משקל $\geq w_{i-1}$. לכן, יש בשני העצים אותו מספר של קשתות במשקל w_i.

שאלה 3 – קשתות צבועות



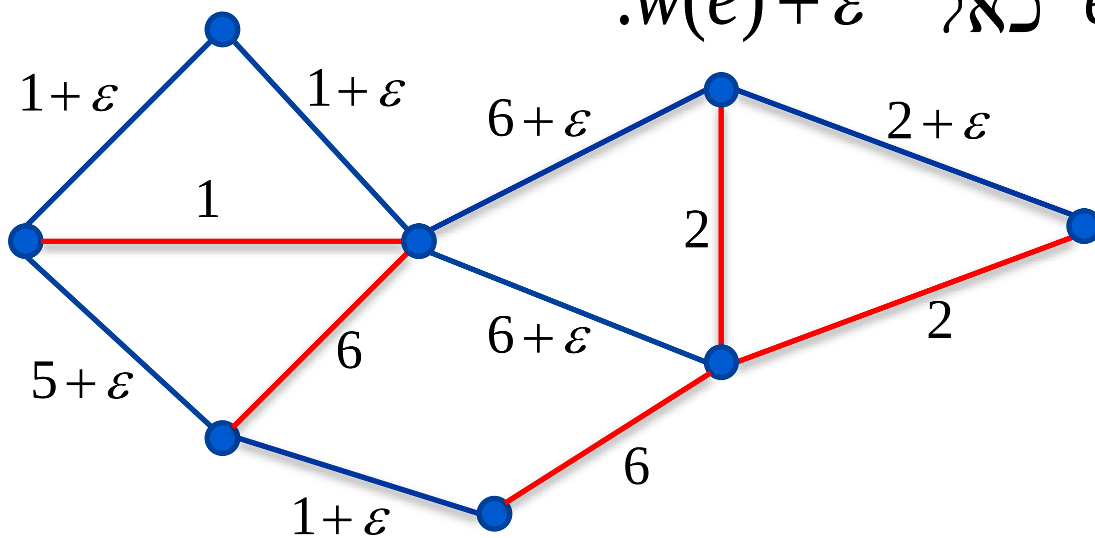
- **תרגיל:** נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, ופונקציית משקל $w:E\to R$. בנוסף, כל קשת צבועה בכחול או באדום. תארו אלג' שמוצא עפ"מ המכיל מספר מקסימאלי של קשתות אדומות (מבין העפ"מים).

שאלה 3 – דוגמא



רעיון לפתרון

- נרצה להעדיף קשתות אדומות.
- נגדיר קבוע קטן ε ונתייחס למשקל של קשת כחולה e כאל $w(e)+\varepsilon$.

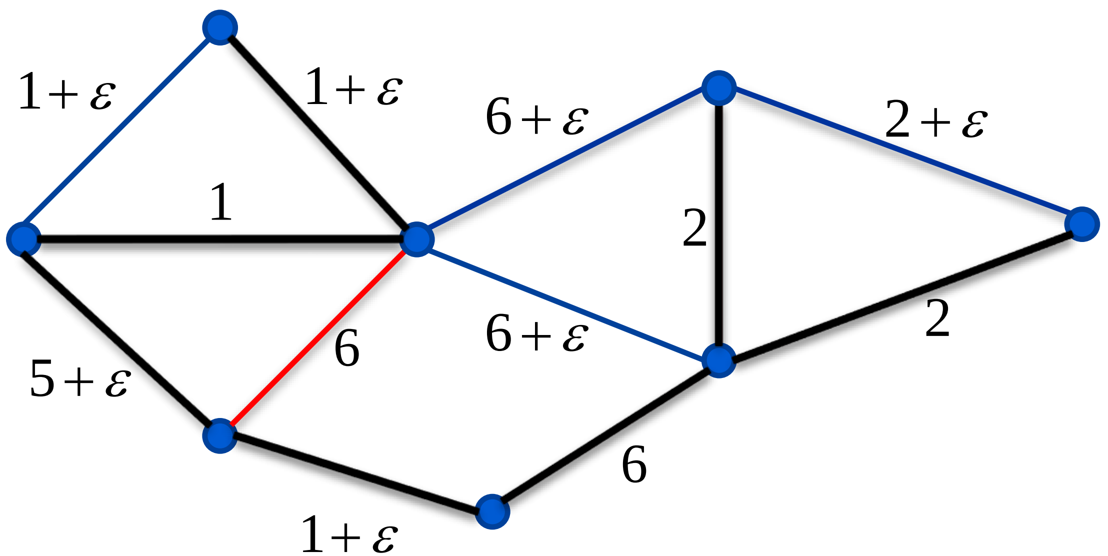


- כלומר, $w': E \to R$ היא פונקציית משקל חדשה, כך שלכל קשת אדומה, $w'(e)=w(e)$, ולכל קשת כחולה $w'(e)=w(e)+\varepsilon$.

נכונות הרעיון

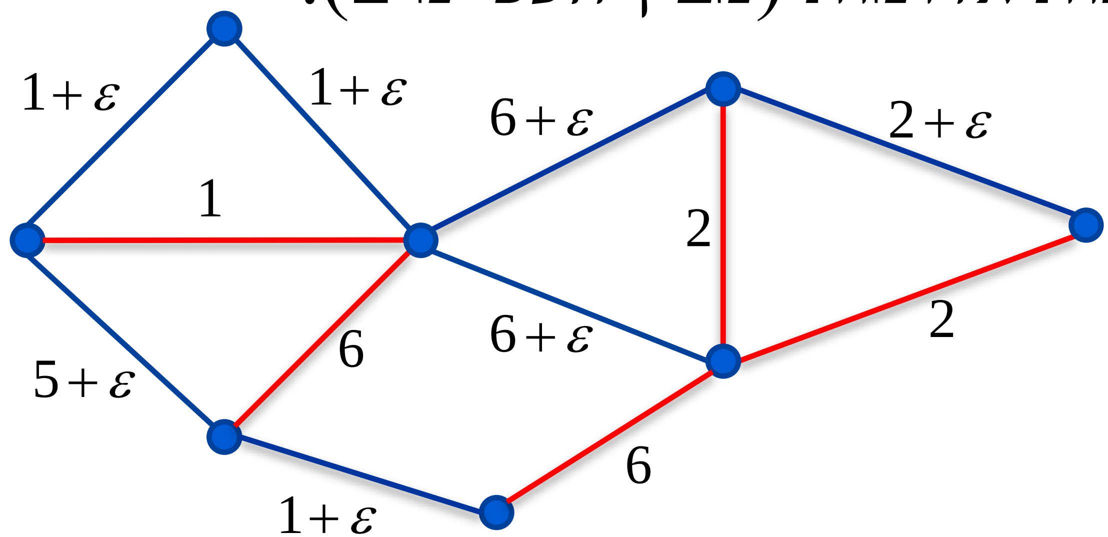
- נניח ש ε **מאוד** קטן. (נסביר עוד מעט בדיוק כמה קטן).
- נריץ את האלגוריתם של Kruskal על הגרף עם פונקצית המשקל החדשה, ונמצא עפ"מ.

$1 \quad 1+\varepsilon \quad 1+\varepsilon \quad 1+\varepsilon \quad 2 \quad 2 \quad 2+\varepsilon \quad 5+\varepsilon \quad 6 \quad 6 \quad 6+\varepsilon \quad 6+\varepsilon$



הוכחת הטענה

- **טענה:** עפ"מ ב G עם w' הוא גם עפ"מ ב G עם w.
- **הוכחה:** שיעורי בית.
- מהטענה, כיוון שהאלגוריתם של Kruskal מוצא עפ"מ ב - G עם w', הוא מוצא עפ"מ ב G המכיל מספר מקסימאלי של קשתות אדומות (מבין העפ"מים).



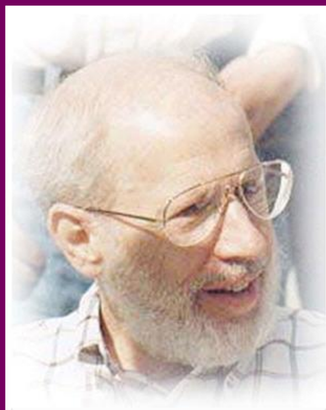
עד כמה קטן $\boxed{\varepsilon}$ צריך להיות?

- אפשר לקחת $\varepsilon < \Delta_{\min}$, כאשר $\Delta_{\min}$ ההפרש הקטן ביותר בין משקלי 2 קשתות בגרף (שהוא לא 0).

(שיעורי בית : לוודא שהטענה בעמוד הקודם מתקיימת עם הגדרה זו של ε).

- כמה זמן יקח לחשב את ε?

שאלה קטנה



- נניח שנחליף את האלג' של Kruskal באלג'
- של Prim, האם נכונות האלגוריתם תשמר?

כן

- האם זמן הריצה של האלג' ישמר?
  - בערך...

$$O(|E|+|V|\log|V|)$$

VS.

$$O(|E|\log|E|)$$

פתרון נוסף

- **פתרון:** במקום להוסיף ε לקשתות כחולות, נסדר את הקשתות לפי משקל ואז לפי צבע בהרצת קרוסקל.
- **תיאור ההוכחה:** האלגוריתם של קרוסקל בוחר את הקשתות לפי הסדר שהוא מקבל אותם. אם נבטיח שיקבל את הקשתות האדומות קודם, הוא תמיד יוסיף אותן אם יוכל.

- **מסקנה:** אם נרצה שעפ"מ מסויים יבחר, תמיד נוכל לסדר את הקשתות כך שקרוסקל יבחר אותו!