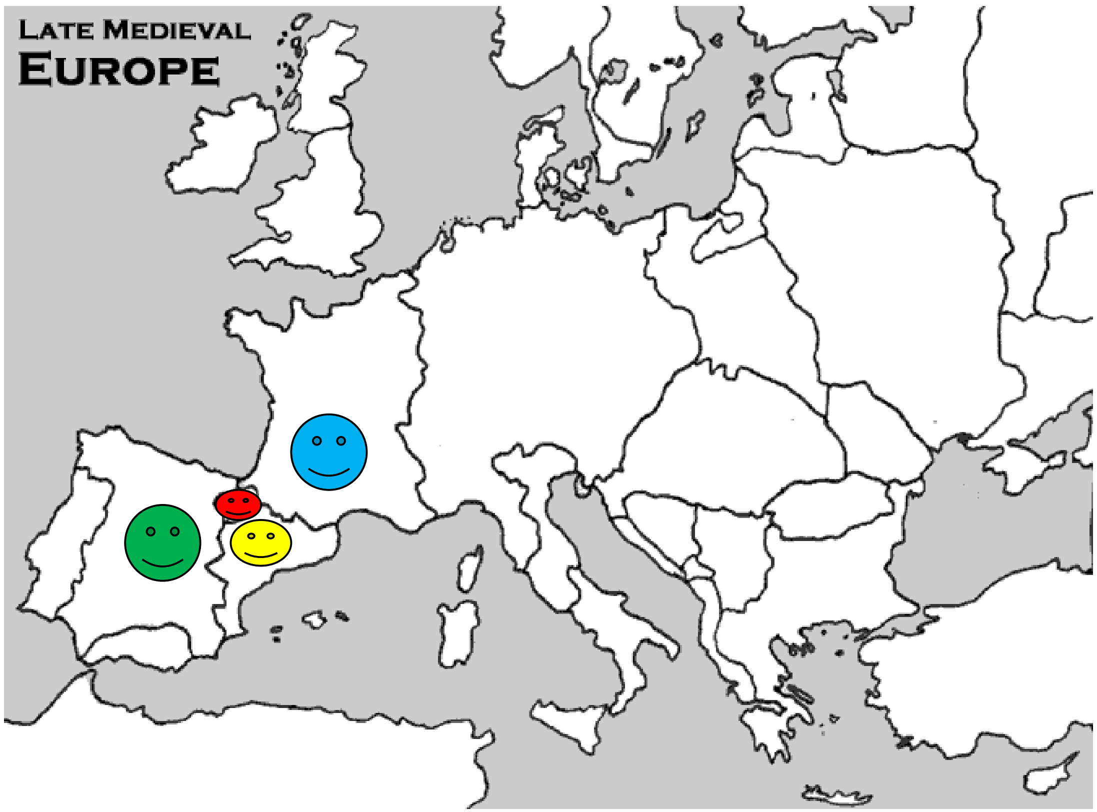
אלגוריתמים – תרגול 2

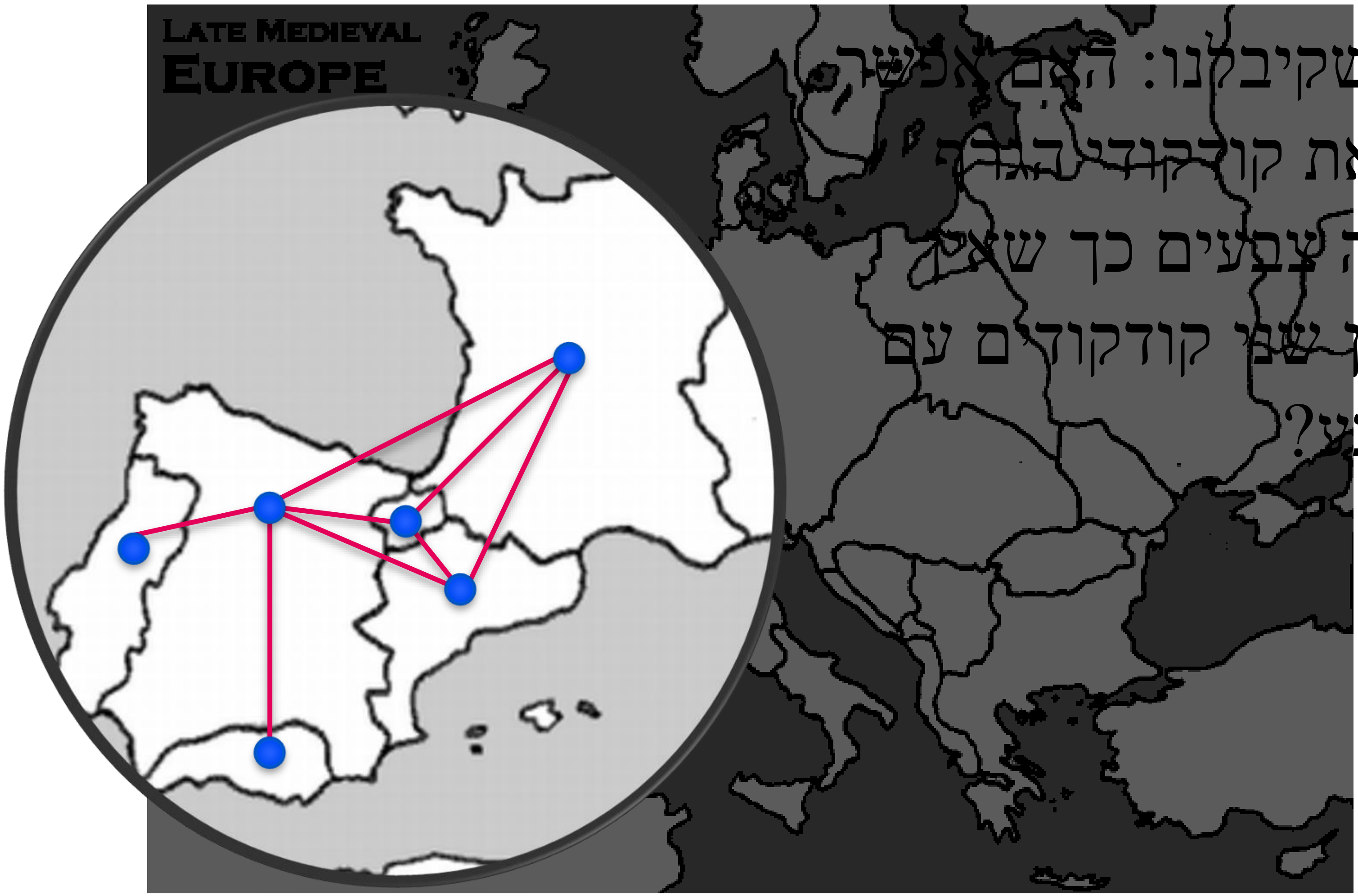
חידה:



האם אפשר לצבוע
את המפה בשלושה
צבעים כך שאף 2
מדינות סמוכות לא
יצבעו באותו צבע?

צביעת מפות – הקשר לגרפים

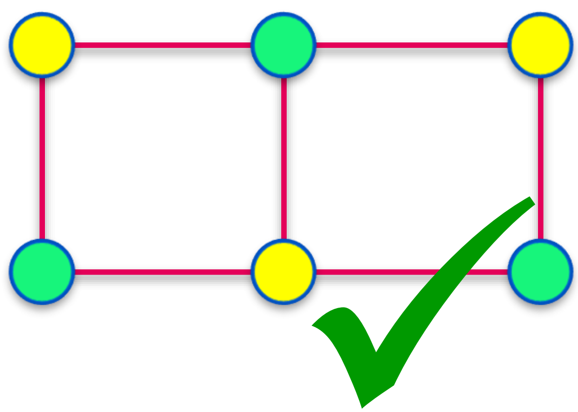
צביעת מפות – הקשר לגרפים

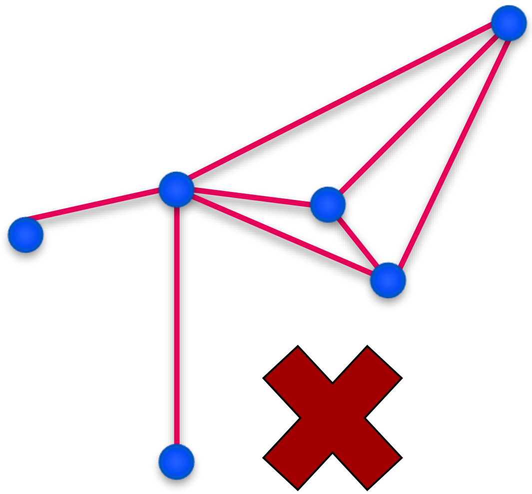


הבעיה שקיבלנו: האם אפשר לצבוע את קודקודי הגרף בשלושה צבעים כך שאין קשת בין שני קודקודים עם אותו צבע?

גירסה פשוטה יותר

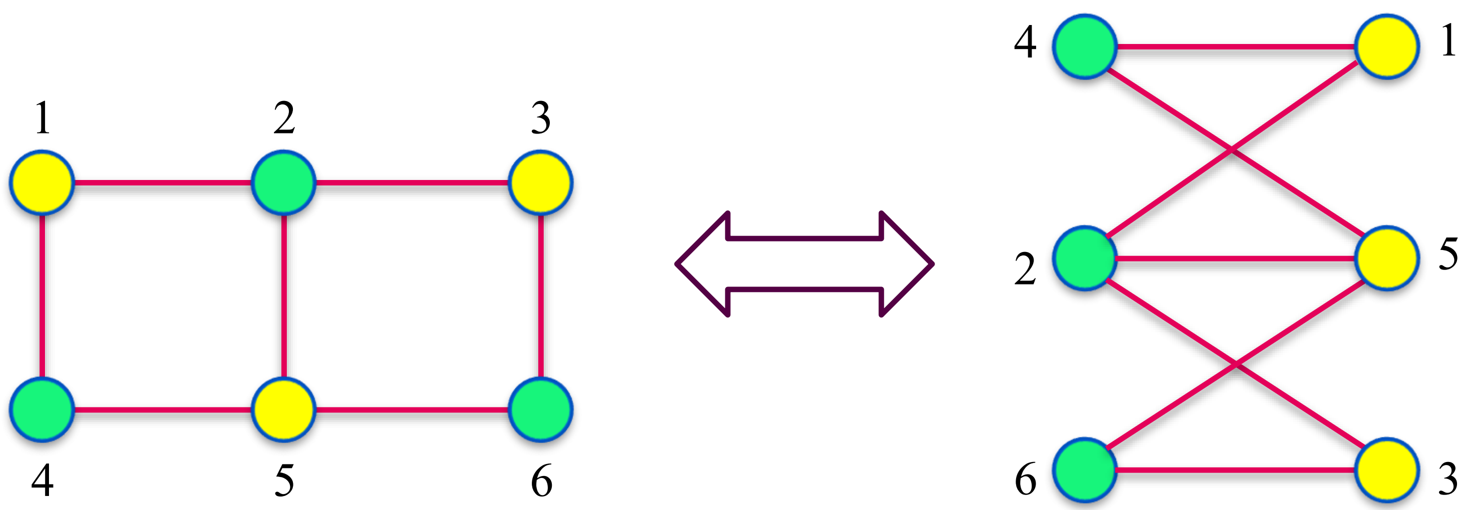
- הבעיה הזו מסובכת מדי בשבילנו (אולי תפגשו אותה בקורסים מתקדמים יותר).
- נעבור לגירסה יותר פשוטה – בהנתן גרף, אנו רוצים לדעת האם ניתן לצבוע אותו בשני צבעים.



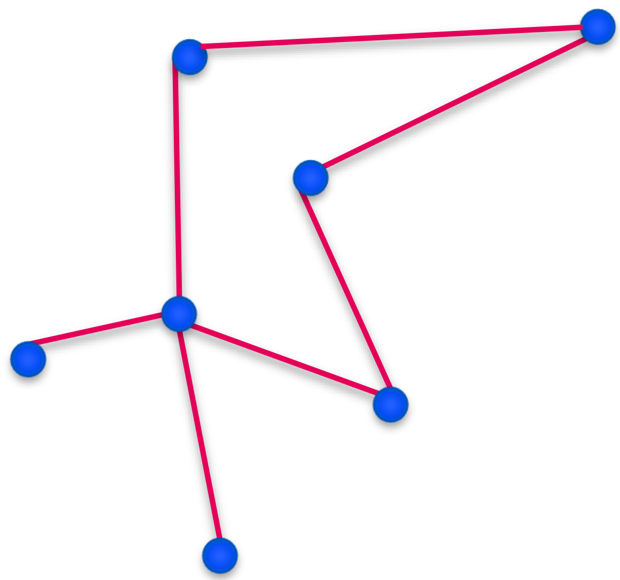


Bipartite Graph / גרף דו-צדדי

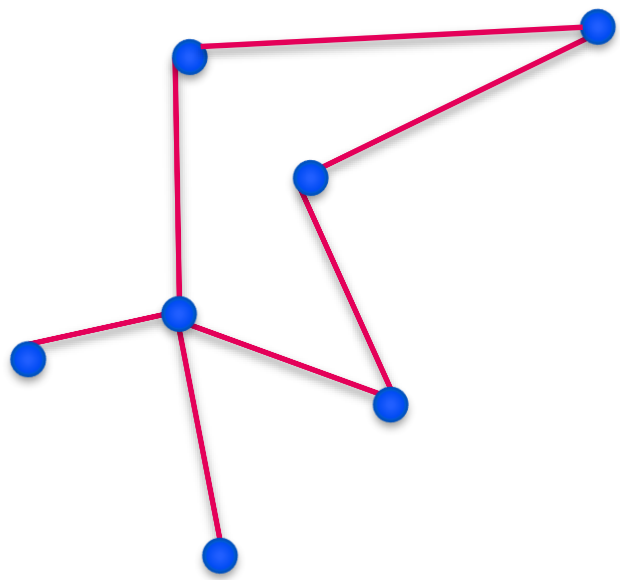
הגדרה: גרף לא מכוון נקרא ***דו צדדי*** אם"ם אפשר לצבוע את קודקודיו בשני צבעים, כך שאף קשת לא מחברת בין שני קודקודים בעלי אותו צבע.



האם הגרף דו-צדדי?



האם הגרף דו-צדדי? תנאי הכרחי ומספיק



טענה: גרף $G=(V,E)$ הינו דו-צדדי אמ"מ הוא אינו מכיל מעגל באורך אי זוגי.

הוכחת הטענה – כיוון ראשון

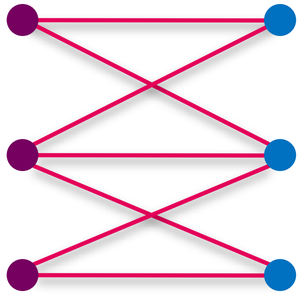
- נניח ש- G הינו דו-צדדי ונראה ש**כל מעגל** בו מעגל באורך זוגי:
  - כל קשת ב- G עוברת מקבוצת קודקודים אחת לשניה ("מצד לצד").

$$\Downarrow$$

  - כל מסלול שמתחיל ונגמר באותו צד – חייב להיות בעל מס' קשתות זוגי.

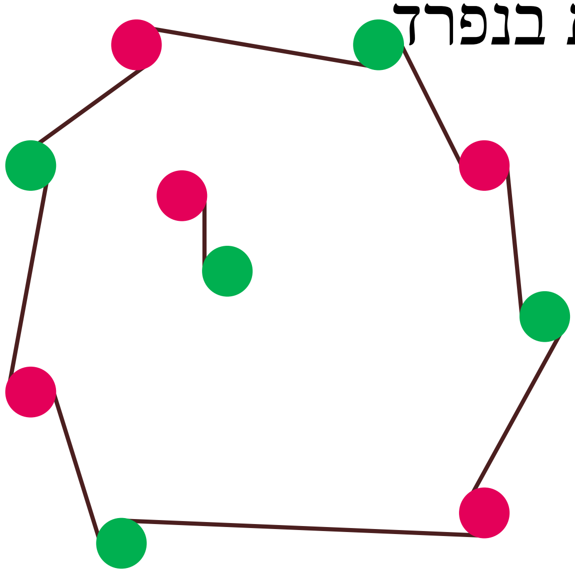
$$\Downarrow$$

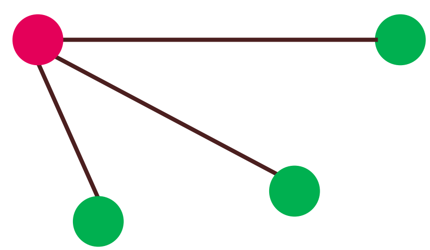
  - מעגל חייב להכיל מספר זוגי של קשתות.

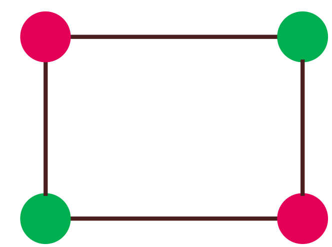


הוכחת הטענה – כיוון שני

- נניח ש**כל מעגל** ב- G מעגל באורך זוגי ונראה שהוא דו-צדדי:
  - מספיק להוכיח את הטענה לכל רכיב קשירות בנפרד
    לכן, נניח ב.ה.כ. שהגרף קשיר.
  - נתאר אלג' שצובע את הגרף בשני צבעים ונוכיח שהוא תמיד עובד.

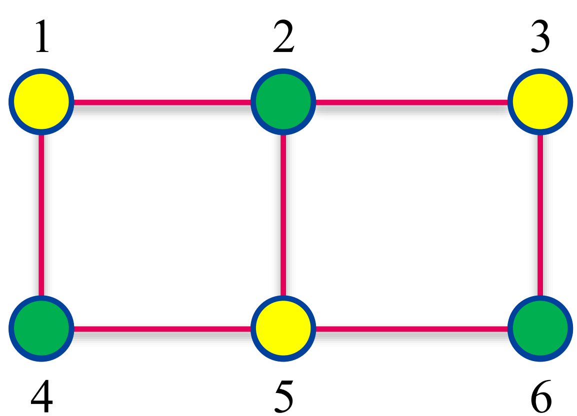


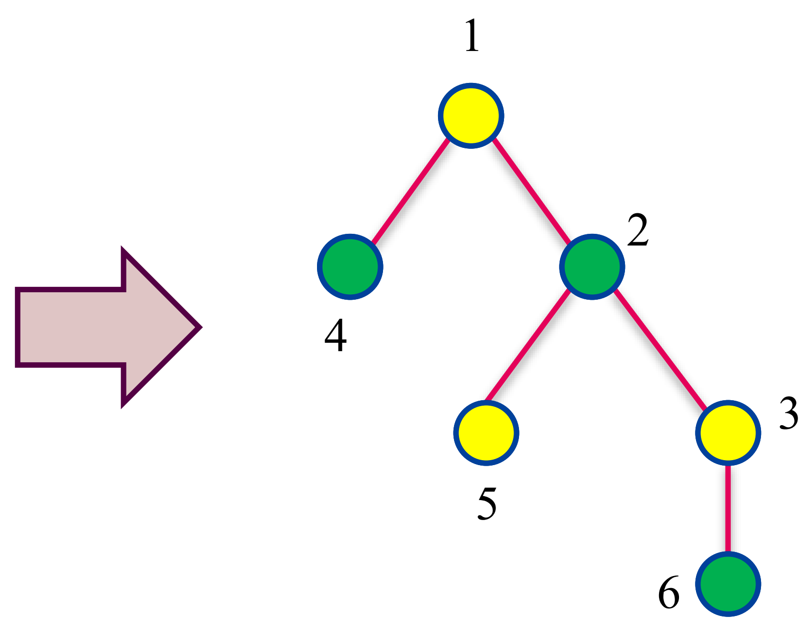




אלגוריתם לצביעת קודקודים

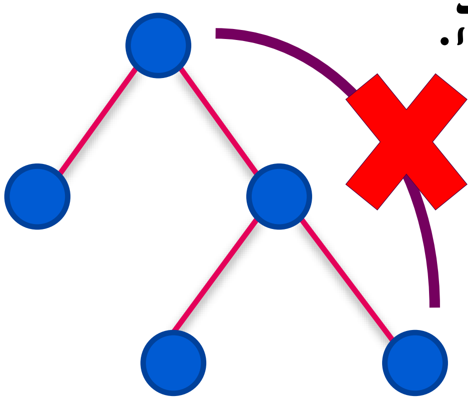
- נבחר קודקוד v באופן שרירותי ונריץ עליו BFS.
- את הקודקודים ברמות זוגיות בעץ ה-BFS נצבע בצהוב, ואת הקודקודים ברמות האי-זוגיות בירוק.





הוכחת הטענה – נכונות האלגוריתם

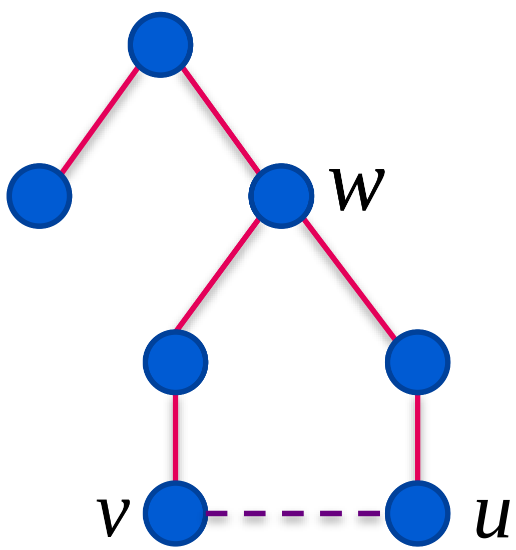
- נראה ש**כל קשת** היא בין שני קודקודים בעלי צבעים שונים:
  - מנכונות BFS: כל קשת בגרף מחברת בין קודקודים ברמות עוקבות של העץ או בין קודקודים מאותה רמה.



  - לפי האלג' שלנו: קשת בין שתי רמות עוקבות תמיד תכיל קודקוד אחד צהוב וקודקוד אחד ירוק.
  - נותר להראות שלא קיימות קשתות המחברות בין קודקודים באותה רמה.

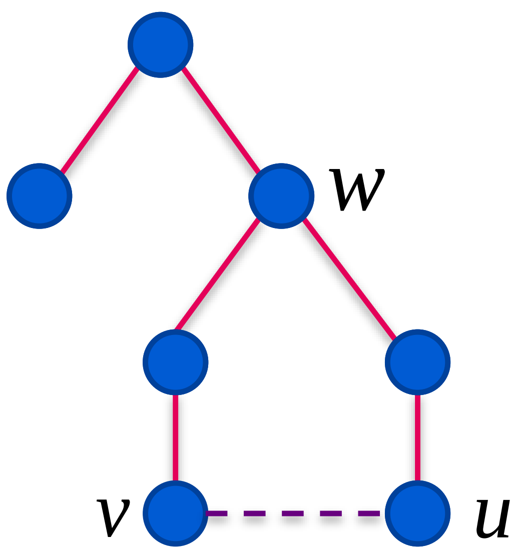
הוכחת הטענה – נכונות האלגוריתם

- נניח שקיימת קשת המחברת בין הקודקודים u ו- v אשר נמצאים באותה רמה בעץ.
- יהי w ה- lowest common ancestor של u ו-v.



הוכחת הטענה – נכונות האלגוריתם

- נסמן ב- p את המסלול בין u ל- w בעץ, ונסמן את אורך המסלול ב- k.
- באופן דומה, נסמן ב- q את המסלול בין v ל- w בעץ, ונשים לב שאורכו אף הוא k.
- הקשת (v,u) יוצרת מעגל באורך $2k+1$ יחד עם p ו- q. ***סתירה!***



לכן לא תיתכן קשת בין שני קודקודים באותה רמה.

שאלה 2 - גרף המסלולים הקצרים ביותר

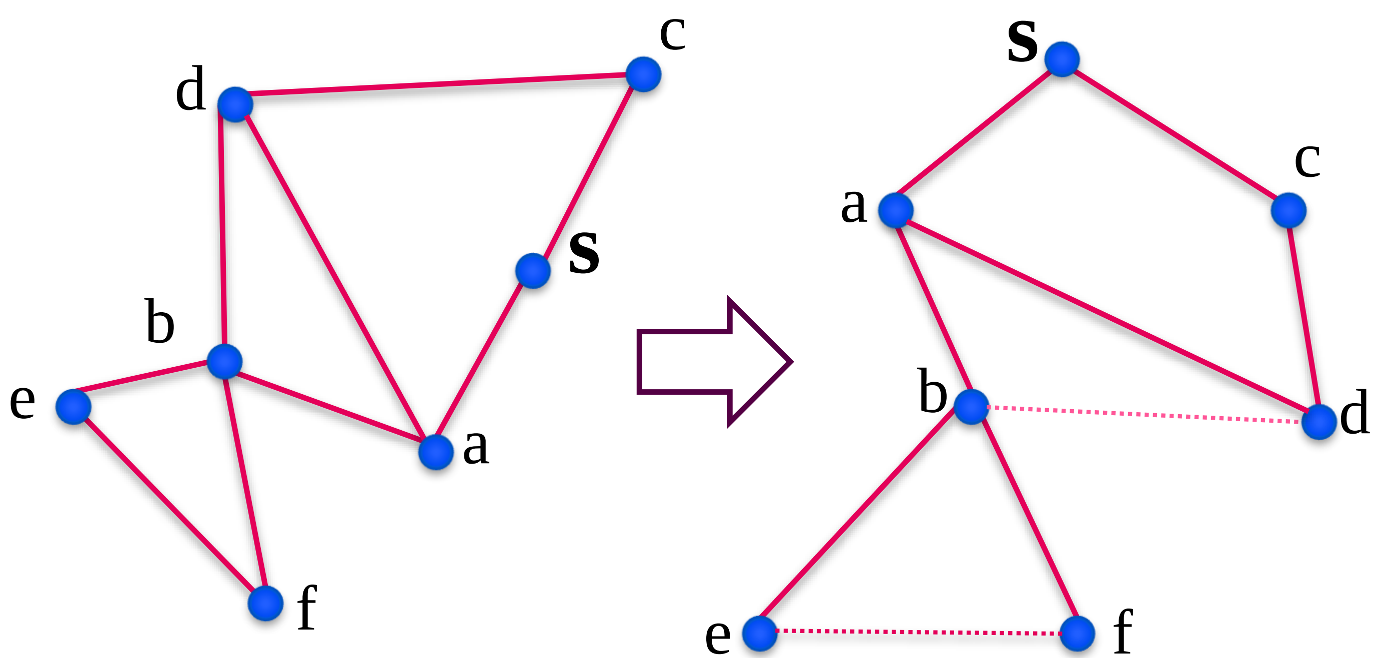
- ***הגדרה:*** עבור גרף $G=(V,E)$ וזוג קודקודים $s,t\in V$, ***מסלול קצר ביותר מ- s ל- t*** הינו מסלול אשר מכיל מספר קשתות מינימאלי מבין כל המסלולים מ- s ל- t (יכולים להיות כמה כאלו).
- ***גרף המסלולים הקצרים ביותר מ- s*** הינו הגרף $G'=(V,E')$ כך ש-

$$E'=\{e\in E : e \text{ is part of a shortest path from } s\}$$

שאלה 2 - גרף המסלולים הקצרים ביותר

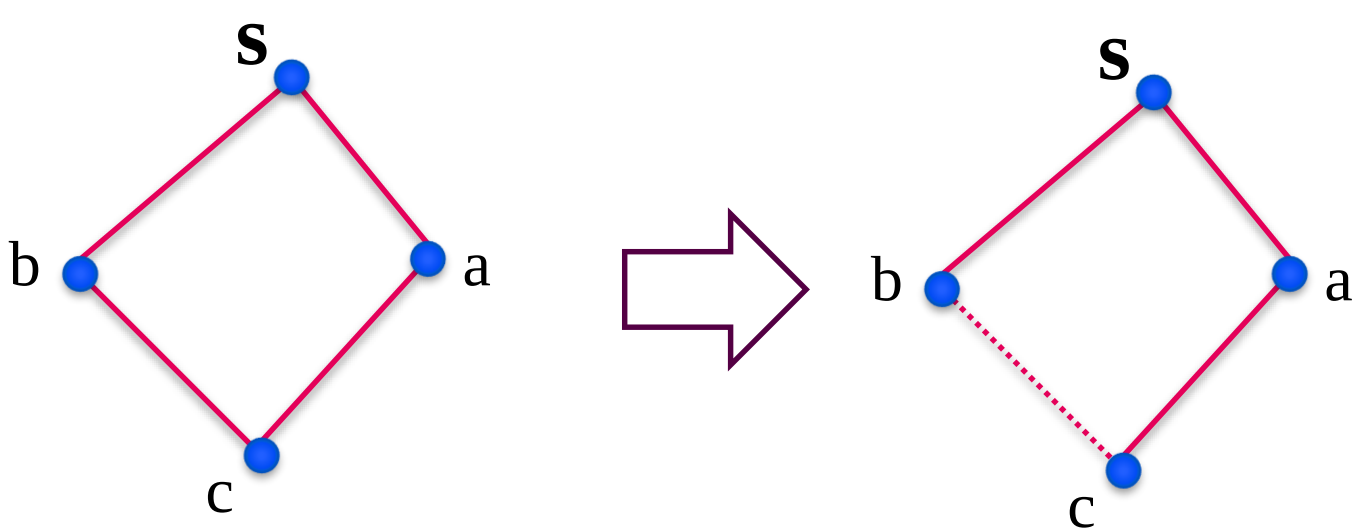
- **תרגיל:** נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וקודקוד $s \in V$.
תארו אלג' המחשב את גרף המסלולים הקצרים ביותר
מ- s בזמן $O(|V|+|E|)$.

- דוגמא:



פתרון פשוט (שנכשל)

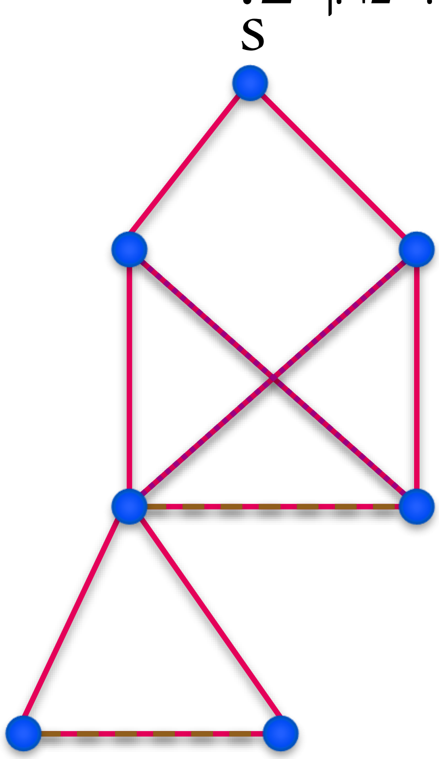
- נריץ BFS מ- s.
- נקבל עץ אשר מכיל מסלול קצר ביותר מ- s לכל קודקוד $v \in V$.
- אך ייתכנו מסלולים קצרים ביותר שאינם מוכלים בעץ זה!



שיפור הפתרון

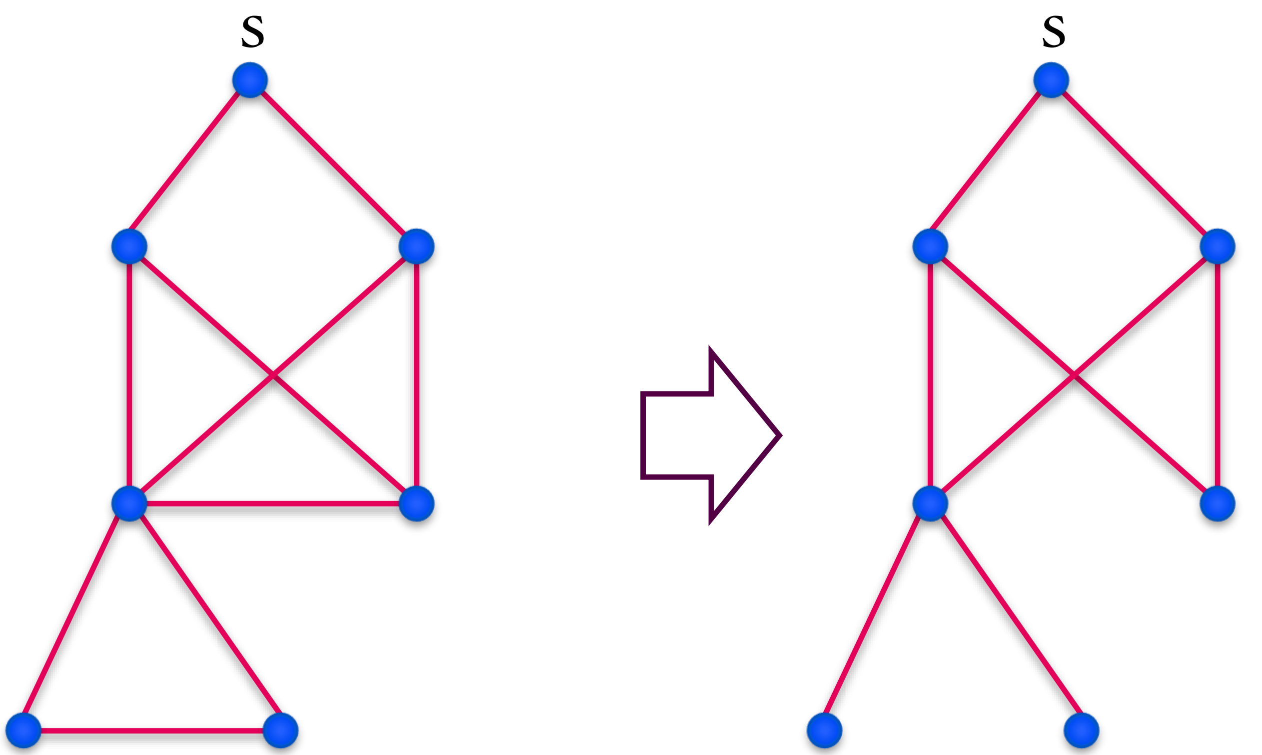
- אילו קשתות חסרות? (יש שתי קבוצות של קשתות)
  - קשתות בין קודקודים באותה הרמה – אף פעם לא על מק"ב!
  - קשתות בין קודקודים ברמות עוקבות – תמיד על מק"ב!

(אבל לא כולן בעץ BFS)



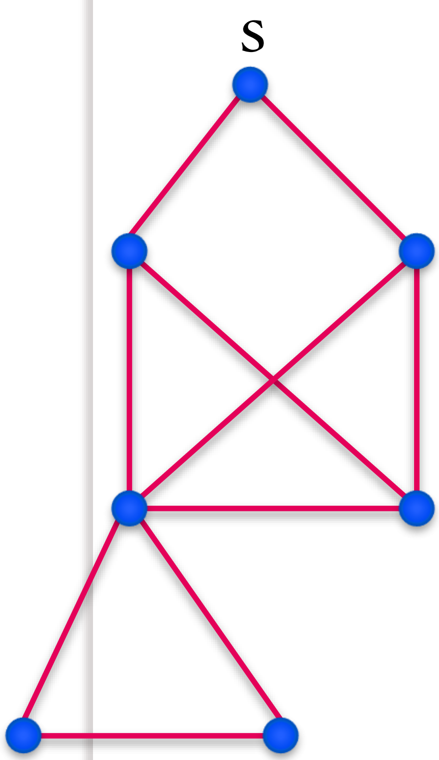
שיפור הפתרון

- נריץ BFS (הקודקודים כעת מחולקים לרמות).
- נעבור על הקשתות ונשמור את כל הקשתות בין רמות עוקבות.



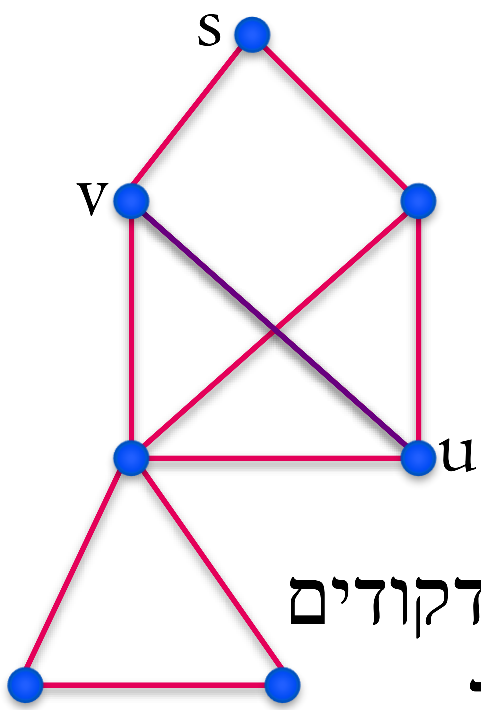
שיפור הפתרון

- **טענה**: קשת היא בין רמות עוקבות אמ"ם היא ב E’ (כלומר על מסלול קצר ביותר מ s)



הוכחת נכונות

- כל קשת e בין קודקוד v ברמה $i-1$ לבין קודקוד u ברמה i תמיד נמצאת במסלול קצר ביותר אל u.
  - אורך של מסלול קצר ביותר בין s לבין u הינו i.
  - קיים מסלול באורך $i-1$ בין s לבין v.
  - אם נוסיף את הקשת (v,u) למסלול, נקבל מסלול באורך i בין s לבין u (כלומר, מסלול קצר ביותר).

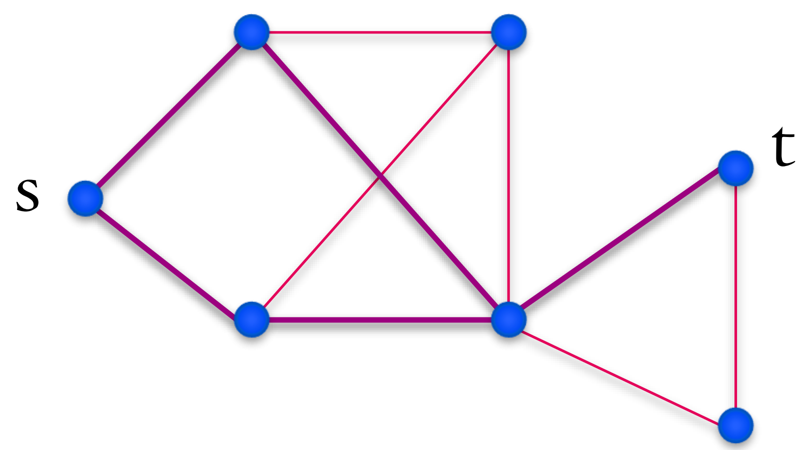


- תרגיל - באופן דומה להראות שקשת בין קודקודים **באותה הרמה** היא **לא באף** מסלול קצר ביותר.

שאלה 3 - המסלולים הקצרים מ-s אל t

- ***הגדרה:*** עבור גרף $G=(V,E)$ וזוג קודקודים $s,t\in V$, ***גרף המסלולים הקצרים ביותר מ-*** s ***ל-*** t הינו הגרף $G'=(V,E')$, כך ש-

$$E'=\{e\in E : e \text{ is part of a shortest path from } s \text{ to } t\}$$

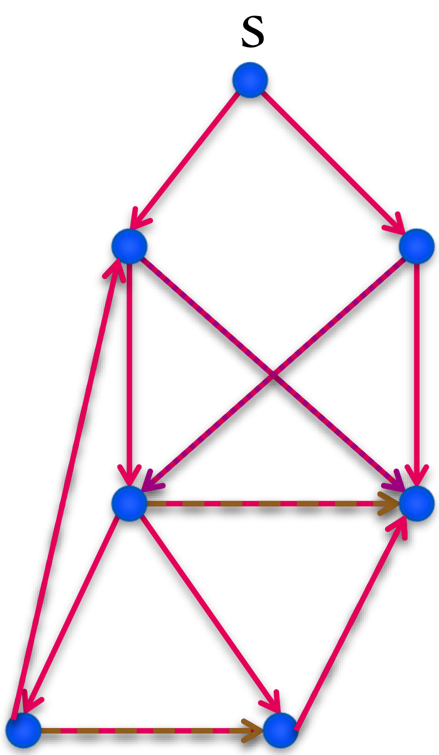


שאלה 3 - המסלולים הקצרים מ-s אל t

- **תרגיל:** נתון גרף <u>מכוון</u> $G=(V,E)$ וזוג קודקודים $s,t\in V$.
  תארו אלג' המחשב את גרף המסלולים הקצרים ביותר מ- s
  ל- t בזמן $O(|V|+|E|)$.

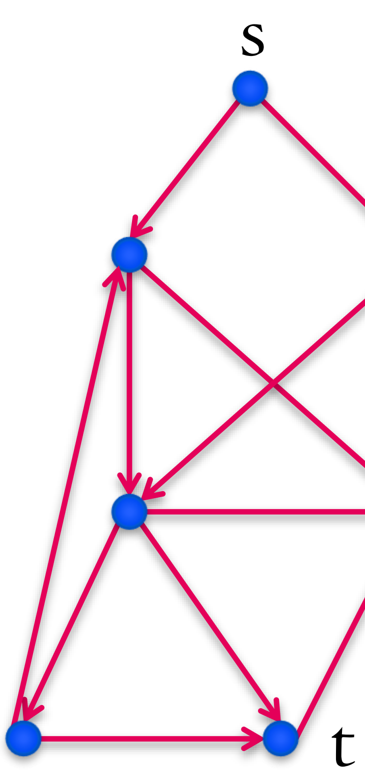
BFS על גרף מכוון

- לאחר ריצת אלג' BFS על גרף מכוון, יש שלושה סוגים של קשתות מהגרף:
  - קשתות בין קודקודים באותה הרמה.
  - קשתות בין קודקודים ברמות עוקבות.
  - קשתות מקודקוד ברמה i אל קודקוד ברמה $j > i$.



פתרון

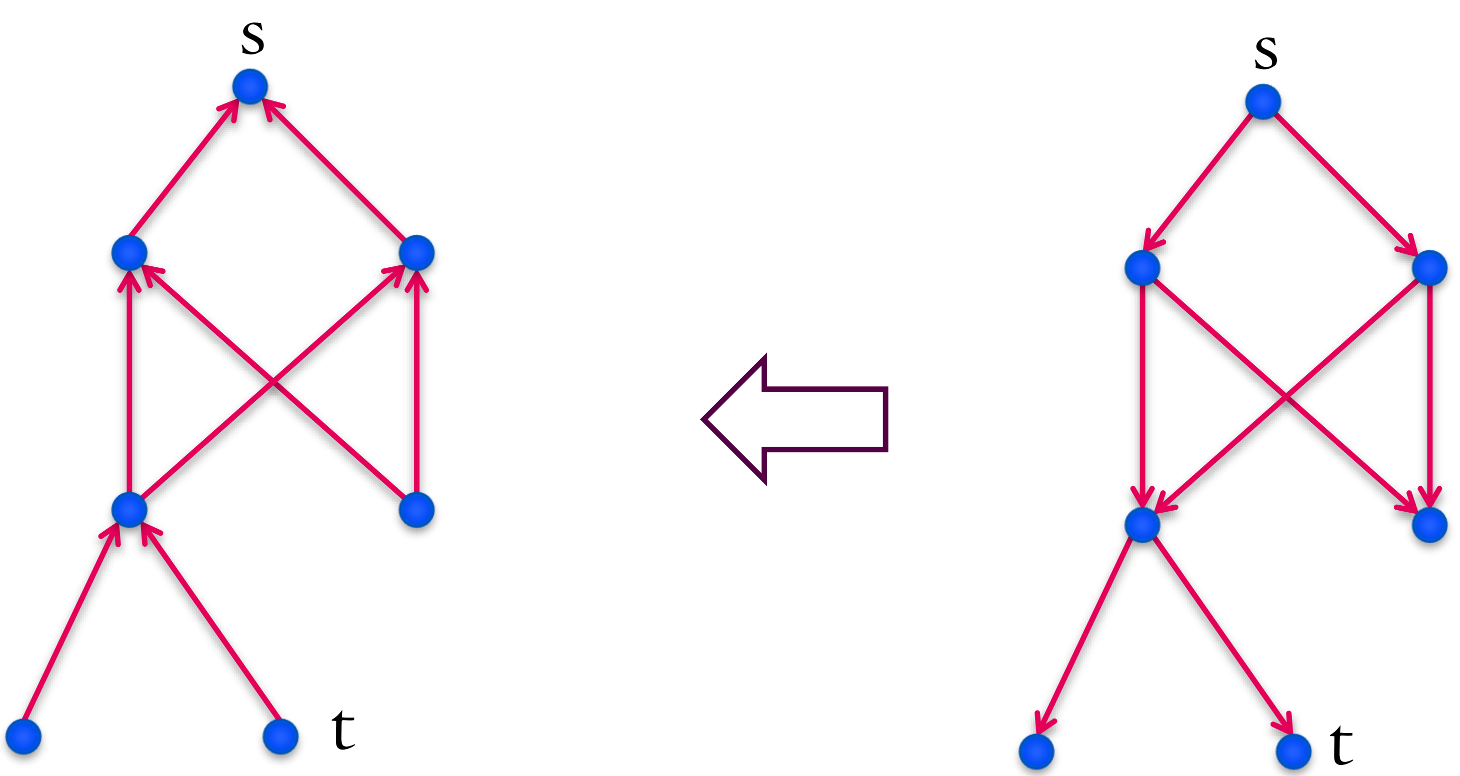
- נשתמש באלגוריתם שתיארנו, הפעם עבור גרף מכוון.
  - האלג' יחזיר את כל הקשתות היוצאות מקודקוד ברמה $i-1$ אל קודקוד ברמה i.



- נקבל גרף שמכיל את כל המסלולים הקצרים ביותר, אך מכיל גם קשתות מיותרות.

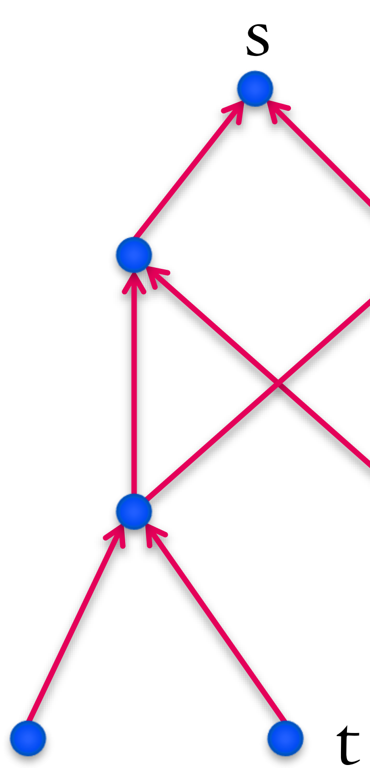
פתרון

- נוסיף עוד שלב:
  - נהפוך את הכיוון של כל קשתות הגרף שקיבלנו.



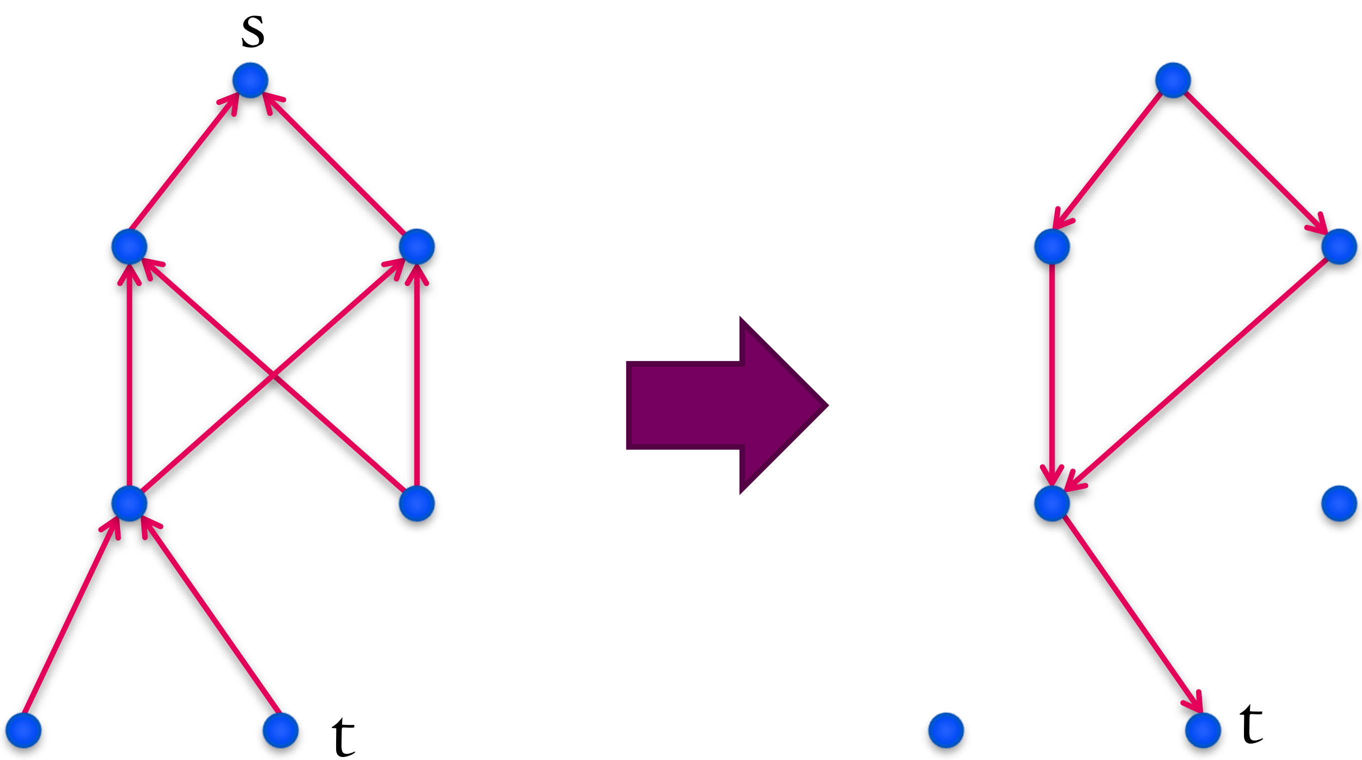
פתרון

- נוסיף עוד שלב:
  - נהפוך את הכיוון של כל קשתות הגרף שקיבלנו.
  - נשתמש באלגוריתם שתיארנו, הפעם מצומת t.
  - כל מסלול מ-s ל-t הופך למסלול מ- t ל- s. מכיוון שכל המסלולים נכנסים ל- s, וכעת אנחנו מסתכלים רק על מסלולים שיוצאים מ- t, נקבל בדיוק את כל המסלולים מ- t ל- s בגרף ה"הפוך".



פתרון

- נהפוך בחזרה את הכיוון של כל הקשתות בגרף שקיבלנו. גרף זה יהיה גרף המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל-t.



סיבוכיות

- הרצת BFS משופר פעמיים: $O(|V|+|E|)$.
- הפיכת כיוון קשתות (פעמיים): $O(|E|)$.
- סה"כ: $O(|V|+|E|)$.