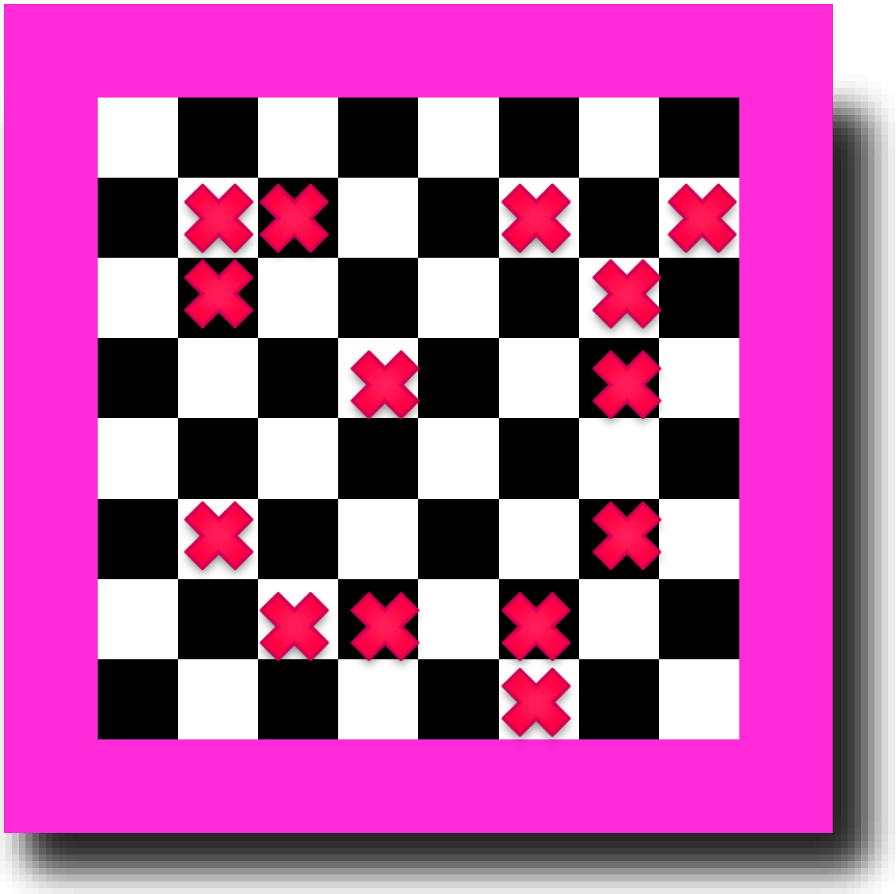
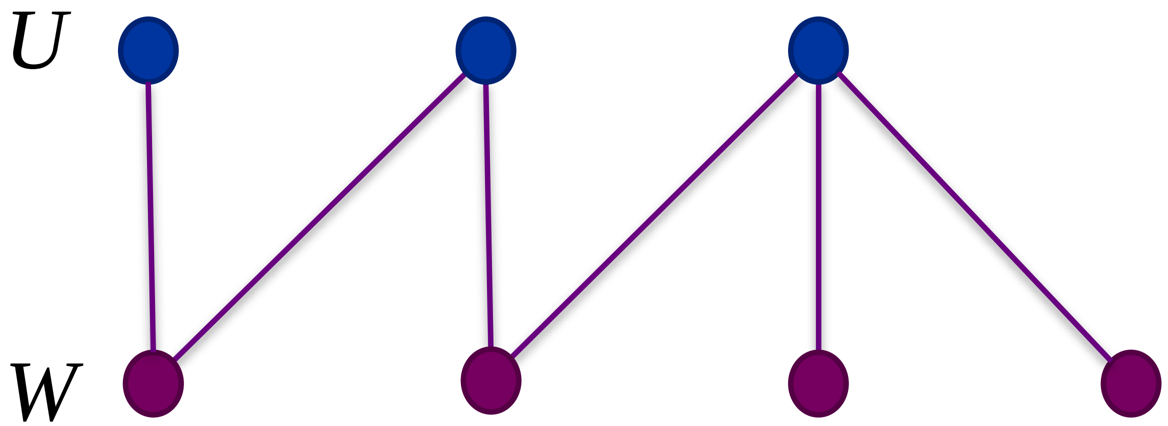
# תרגול 13 – עוד זרימה!

- נתון לוח שח בגודל $n \times n$ לאחר שהוסרו ממנו חלק מהמשבצות. האם ניתן לכסות אותו על ידי אבני דומינו?



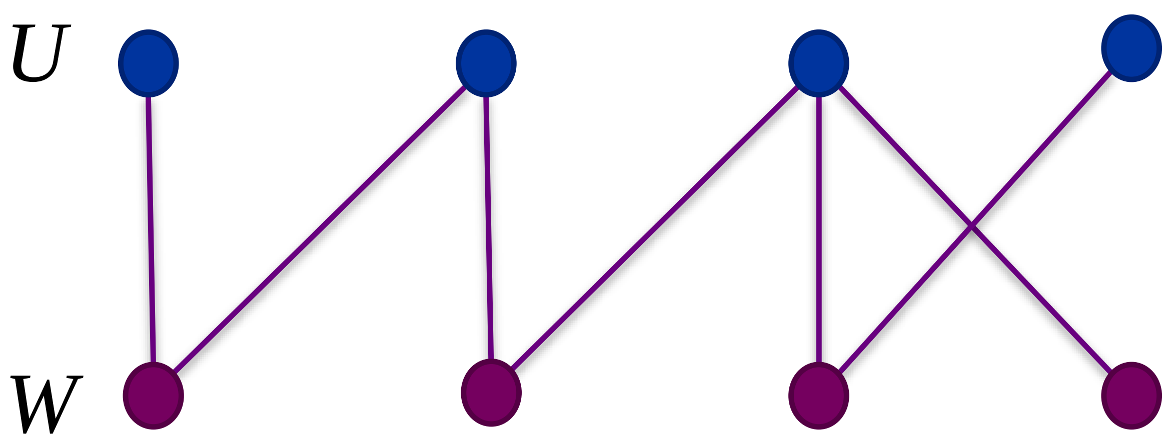
# תזכורת – זיווגים בגרף דו-צדדי

- **הגדרה:** עבור גרף דו צדדי לא מכוון $G=(U,W,E)$
  זיווג הינה קבוצת קשתות זרות בקודקודים $M\subseteq E$.
  גודל הזיווג הינו מספר הקשתות בקבוצה.



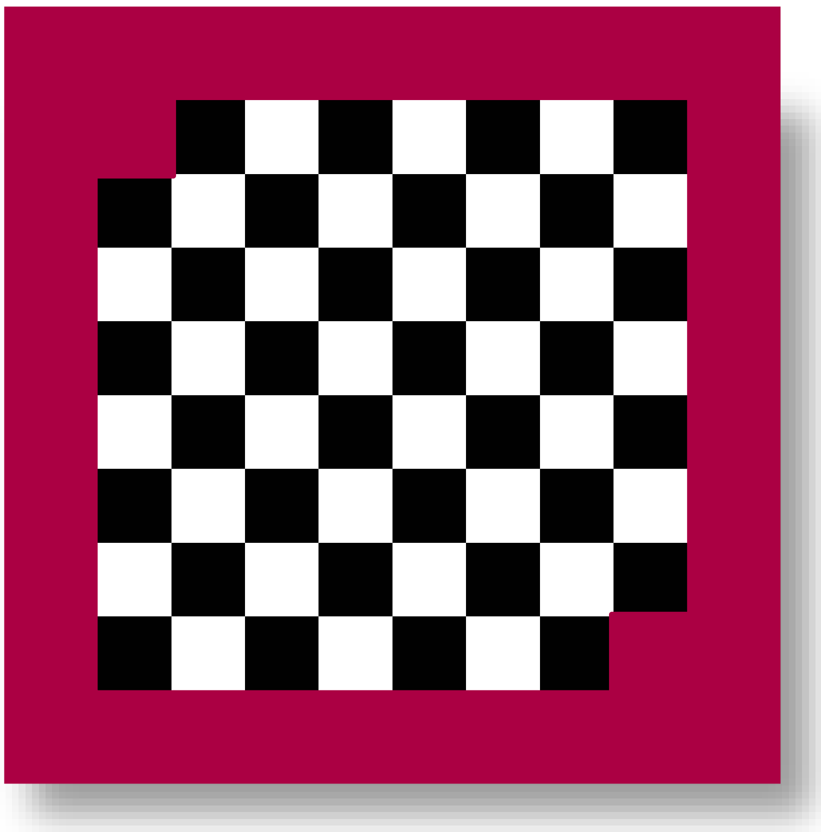
# זיווג מושלם / Perfect Matching

- **הגדרה:** בהנתן גרף עם מספר זוגי של צמתים, ***זיווג מושלם*** הינו זיווג שבו כל צומת מזווג.
  - ייתכן זיווג מושלם בגרף דו-צדדי רק אם $|U|=|W|$.



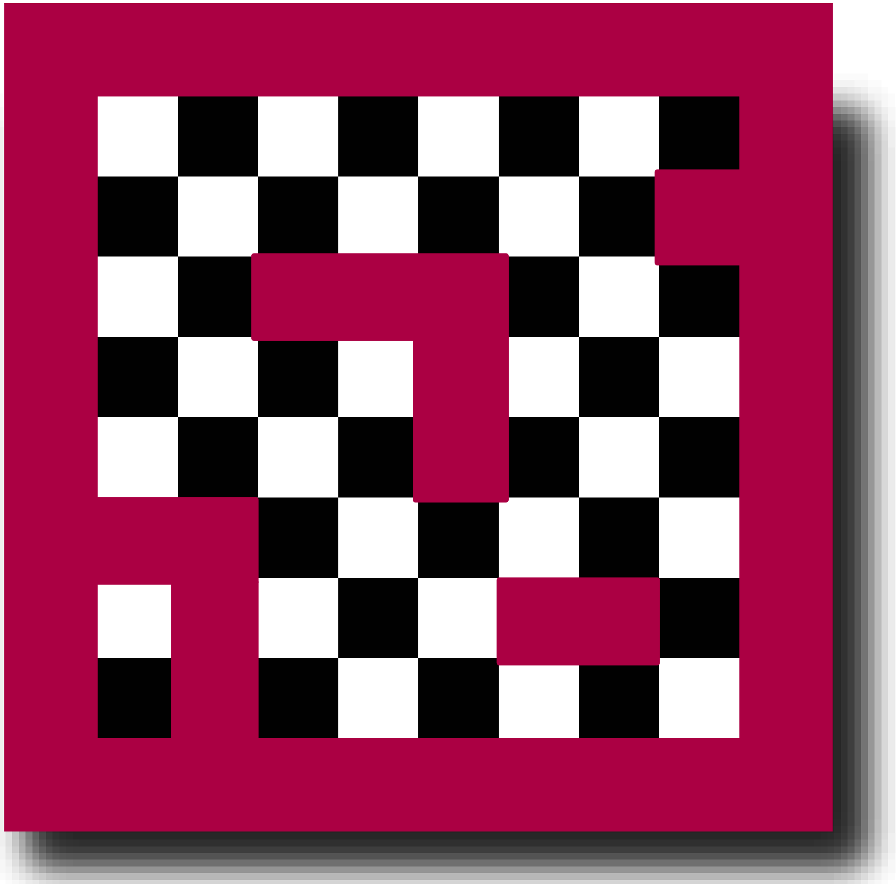
# חידה פשוטה

- נתון לוח שח שהוסרו ממנו שתי פינות נגדיות. האם ניתן לכסות אותו על ידי אבני דומינו, כך שכל משבצת תכוסה ע"י אבן אחת בדיוק?



# חידה פחות פשוטה

- נתון לוח שח בגודל $n \times n$ לאחר שהוסרו ממנו חלק מהמשבצות. תארו אלגוריתם שבודק האם ניתן לכסות אותו על ידי אבני דומינו.

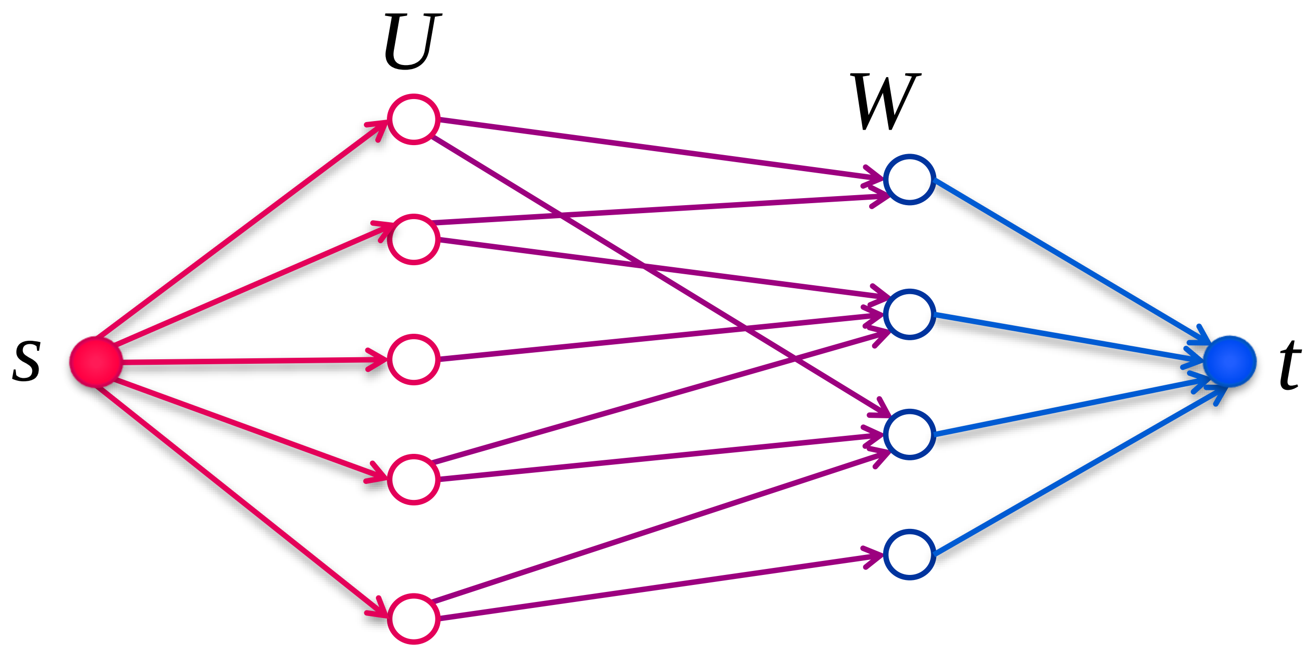


# הקשר לזיווגים מושלמים בגרפים דו-צדדיים

- נבנה גרף באופן הבא:
  - ניצור קודקוד עבור כל משבצת.
  - ניצור קשת עבור כל זוג משבצות סמוכות.
- זהו גרף דו צדדי – צד אחד מכיל את הקודקודים שמייצגים משבצות לבנות, והצד השני את אלו שמייצגים משבצות שחורות.
- קיים כיסוי חוקי של אבני דומינו אם ורק אם קיים זיווג מושלם בגרף.
  - זיווג מושלם מתאים לקבוצת אבני דומינו שאינן חופפות (=זיווג) ומכסות את כל המשבצות (=מושלם).

# הקשר לזיווגים מושלמים בגרפים דו-צדדיים

- על מנת למצוא זיווג מקסימום בגרף דו-צדדי, בנינו רשת מטיפוס 2.

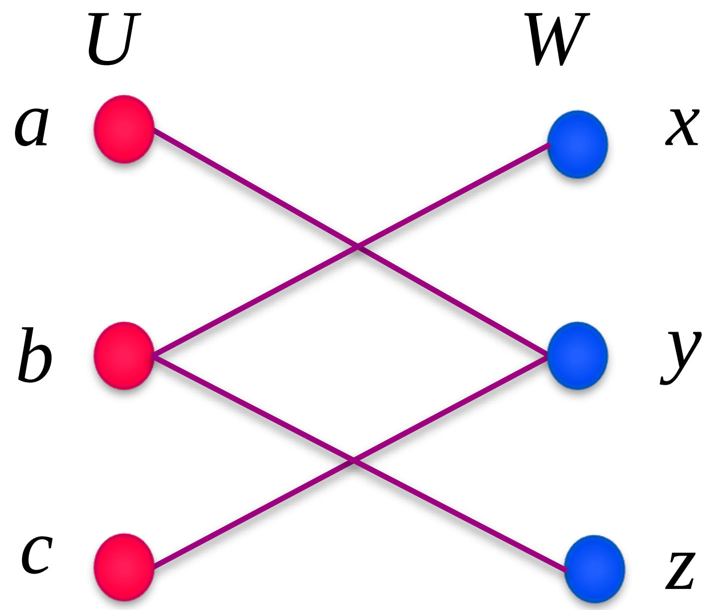



- לכן נוכל למצוא זיווג מקסימום ב- $O\left(|E|\sqrt{|V|}\right)$ זמן.

# שאלה 1 – משפט Hall

- **הגדרה:** עבור גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(U,W,E)$ ותת-קבוצה $X\subseteq U$, נגדיר

$$.N(X)=\{y\in W:(x,y)\in E \text{ for some } x\in X\}$$




$N(\{b\})=$

$N(\{a,c\})=$

# שאלה 1 – משפט Hall

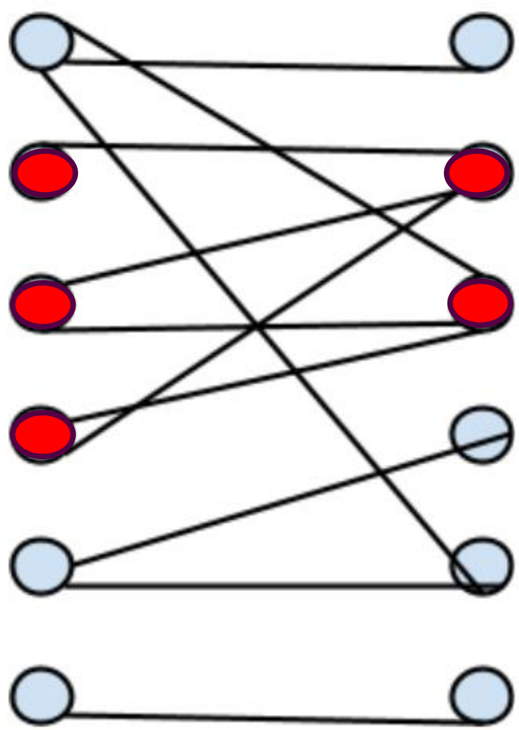
- **הגדרה:** עבור גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(U,W,E)$ ותת-קבוצה $X\subseteq U$, נגדיר

$$.N(X)=\{y\in W:(x,y)\in E \text{ for some } x\in X\}$$

- **תרגיל:** נתון גרף דו-צדדי $G=(U,W,E)$ כך ש- $|U|=|W|=n$.
- הוכיחו את הטענה – קיים זיווג מושלם בגרף אם ורק אם לכל תת קבוצה $X\subseteq U$ מתקיים $|X|\le|N(X)|$.

# שאלה 1 – משפט Hall - דוגמא

- האם בגרף הזה יש זיווג מושלם?



לא.

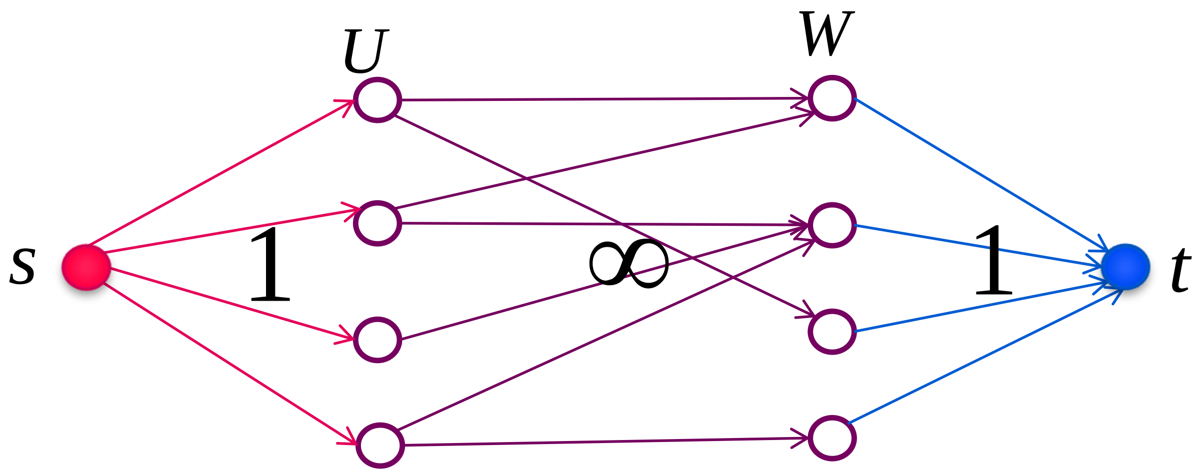
# שאלה 1 – כיוון ראשון

- נניח שקיים זיווג מושלם בגרף, ונוכיח שלכל תת-קבוצה $X \subseteq U$ מתקיים $|X| \le |N(X)|$.

- נבחר זיווג מושלם, ונסמן ב- $W \subseteq Y$ את קבוצת הקודקודים שמתאימים בזיווג לקודקודי $X$.
- נשים לב שמתקיים $|X| = |Y|$ וגם $Y \subseteq N(X)$.
- לכן, $|X| = |Y| \le |N(X)|$.

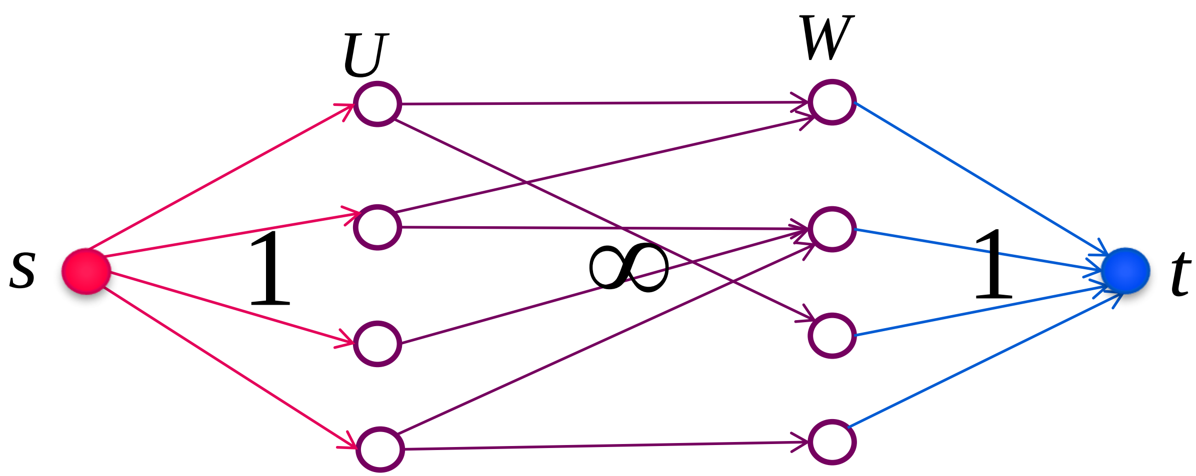
# שאלה 1 – כיוון שני

- נניח שלכל תת-קבוצה $X \subseteq U$ מתקיים $|X| \le |N(X)|$ ונראה שקיים זיווג מושלם.
  - נהפוך את הגרף לרשת זרימה כמו שראינו בתרגול הקודם, אך ניתן לקשתות מ- $U$ ל- $W$ קיבול אינסופי.



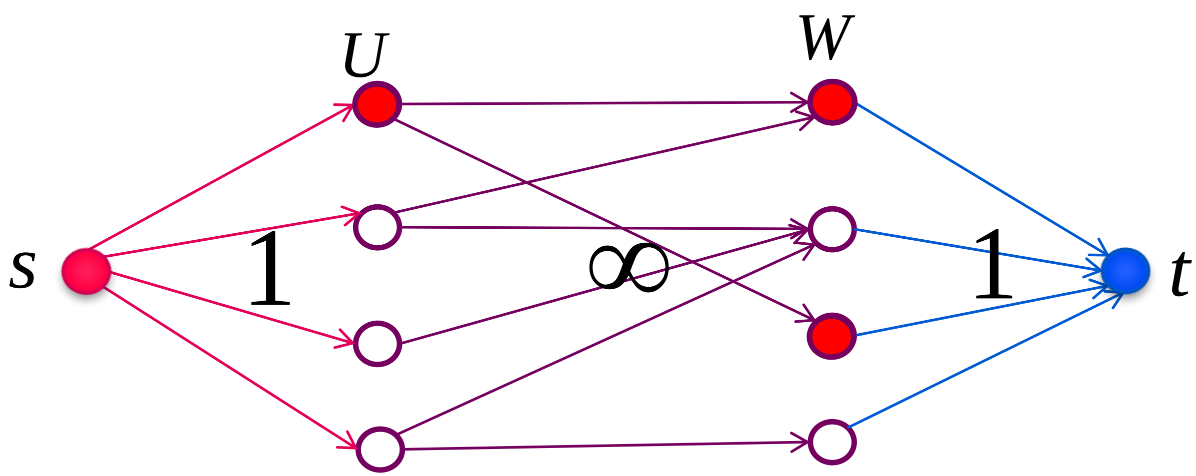
# שאלה 1 – כיוון שני

- בשבוע שעבר ראינו שגודל הזרימה המקסימאלית שווה לגודל של זיווג מקסימום.
- נרצה להוכיח שקיימת זרימה בגודל $n$.
- נוכיח שכל חתך הוא בגודל $\leq n$.



# שאלה 1 – כיוון שני

- יהי $S,T$ חתך **סופי** בגרף
- נסמן באדום קדקודים מ-$S$
- נסמן בכחול קדקודים מ-$T$
- כמה תורם כל קדקוד $U \ni u$ לגודל החתך?
- כמה תורם כל קדקוד $W \ni w$ לגודל החתך?



# שאלה 1 – כיוון שני

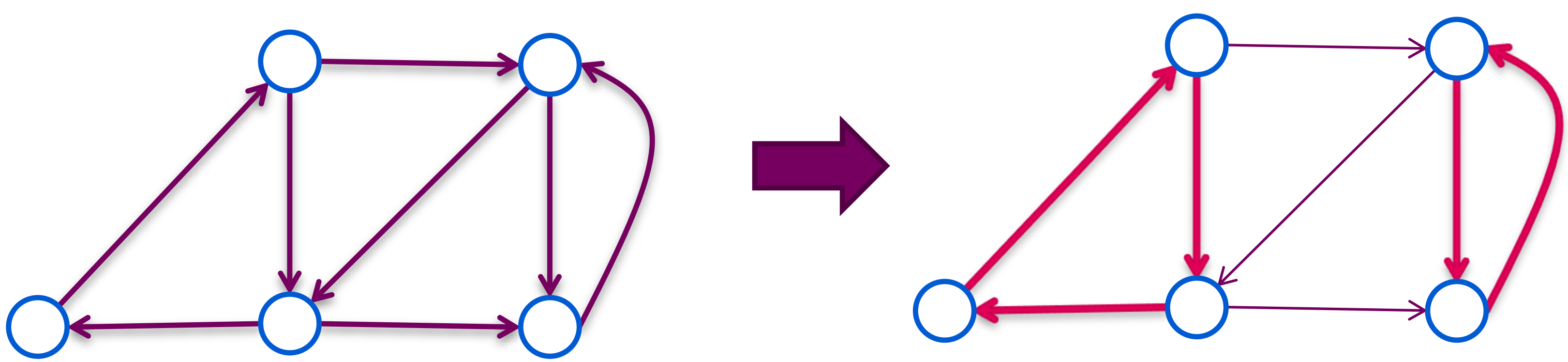
- יהי חתך $S,T$ **בגודל סופי** $k$.     טוענים: $k \geq n$.
- לכל $u \in U$, אם $u \in S$ אז גם $N(\{u\}) \subseteq S$.
- לכן $|S \cap W| \leq |S \cap U|$ $(*)$

- $C(S,T) =$

1. $= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$     (מהגדרה)
2. $= \sum_{v \in T} c(s,v) + \sum_{v \in S} c(v,t)$     (כי $k$ סופי)
3. $= \sum_{v \in T \cap U} 1 + \sum_{v \in S \cap W} 1$     (ממבנה הגרף)
4. $= |T \cap U| + |S \cap W|$
5. $\geq |T \cap U| + |S \cap U| = n$     (מ- $*$)

# שאלה 2 – תת גרף עם דרגות 1

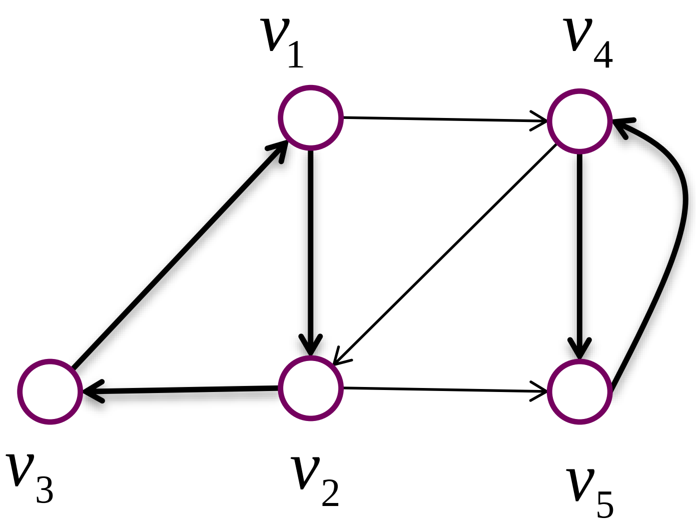
- **תרגיל:** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$. תארו אלג' המוצא קבוצת קשתות $E'\subseteq E$, כך שלכל קודקוד בגרף $G'=(V,E')$ דרגת כניסה 1 ודרגת יציאה 1 (או מודיע שלא קיימת קבוצה כזו).

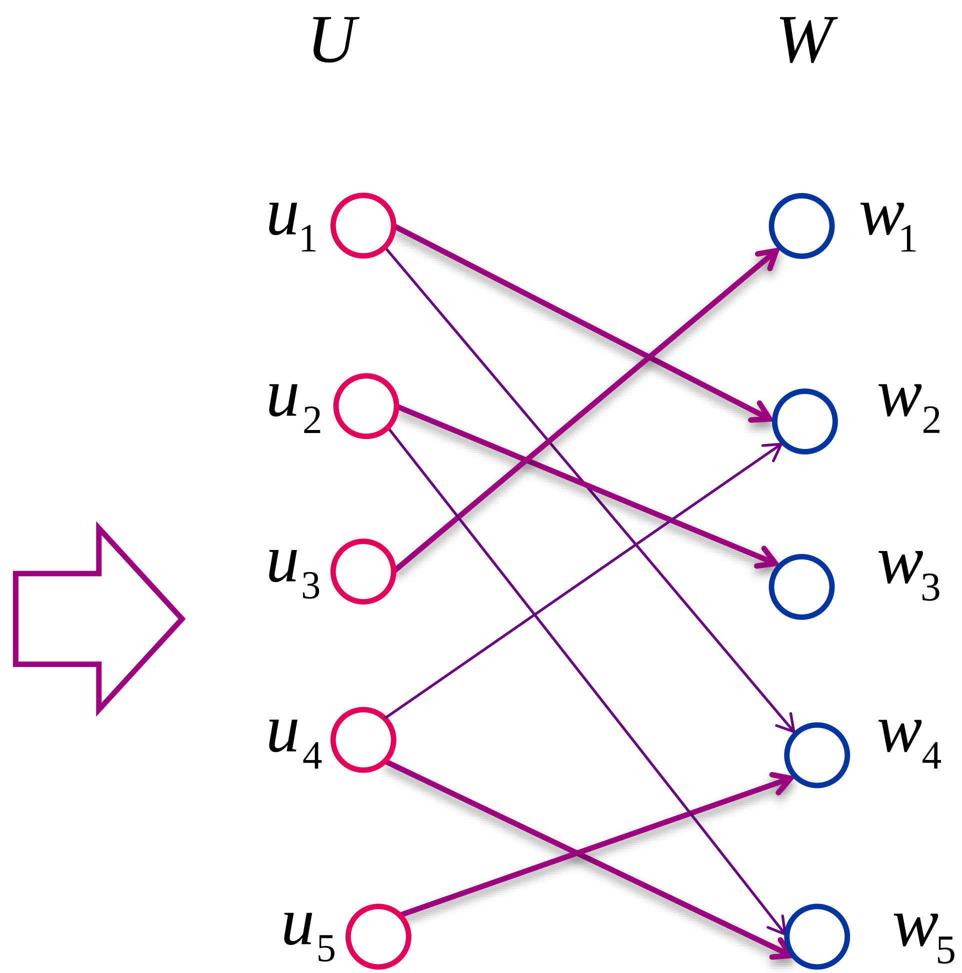


# שאלה 2 : פתרון

- נבנה גרף דו צדדי $G=(U,W,E^*)$ כך ש- $U=W=V$.
  - נסמן $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\},W=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$.
- לכל קשת $(v_i,v_j)\in E$, ניצור קשת $(u_i,w_j)\in E^*$.
- נבדוק האם קיים בגרף זיווג מושלם (על ידי מציאת זיווג מקסימום).
- אם מצאנו זיווג מושלם, נחזיר את קבוצת הקשתות בגרף המקורי אשר מתאימות לקשתות הזיווג.
- אחרת, נודיע שלא קיים תת-גרף מתאים.

# שאלה 2 : דוגמא



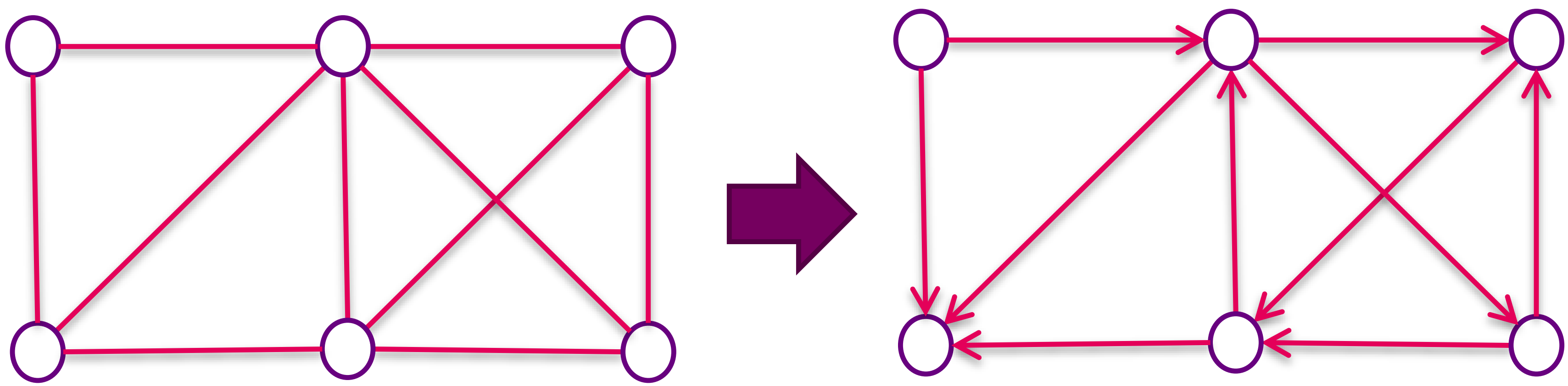



# שאלה 2: הוכחת נכונות

- צ"ל: בגרף החדש יש זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ יש תת קבוצה של קשתות שעונה על הדרישה.
- $\Leftarrow$ אם יש זיווג מושלם בגרף החדש, אז לכל קשת $(u_i, w_j)$ בזיווג, נבחר את הקשת $(v_i, v_j)$ לקבוצה. התחלנו מזיווג מושלם, לכן לכל קדקוד $v$ תהיה דרגת יציאה בדיוק 1 ודרגת כניסה בדיוק 1.
- $\Rightarrow$ אם יש תת קבוצה $E'$ שעונה על הדרישה, אז לכל קשת $(v_i, v_j)$ בקבוצה נבחר את הקשת $(u_i, w_j)$. קבוצות הקשתות שנבחר מהווה זיווג מושלם: כל קדקוד $U \in u$ מזווג, ובדיוק לקדקוד אחד, וגם כל $W \in w$.

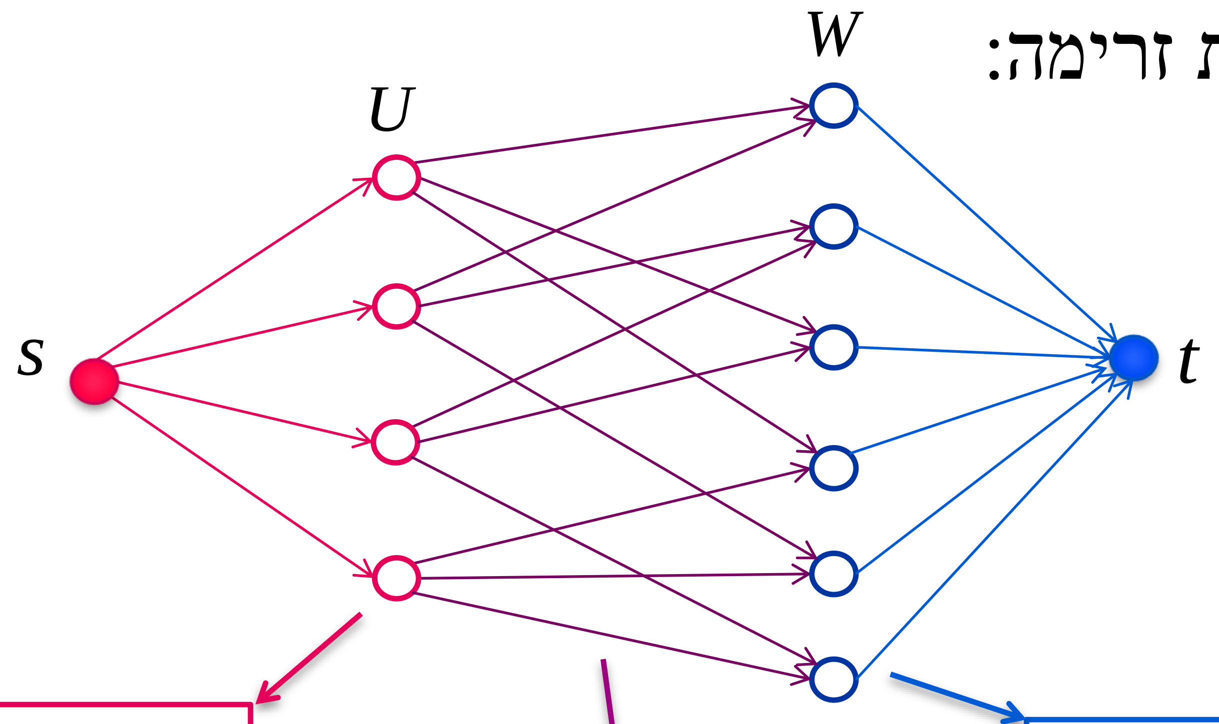
# שאלה 3: אילוצי דרגות

- **תרגיל:** נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. תארו אלג' אשר מכוון את קשתות הגרף, כך שבגרף שיתקבל לכל קודקוד תהיה דרגת יציאה $3 \geq$ (או מודיע שלא קיים כיוונון כזה).



# שאלה 3 : פתרון

- נבנה רשת זרימה:



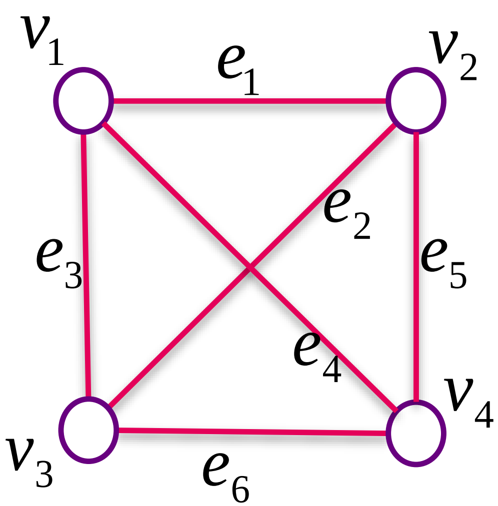

קודקוד עבור כל קודקוד של הגרף המקורי.

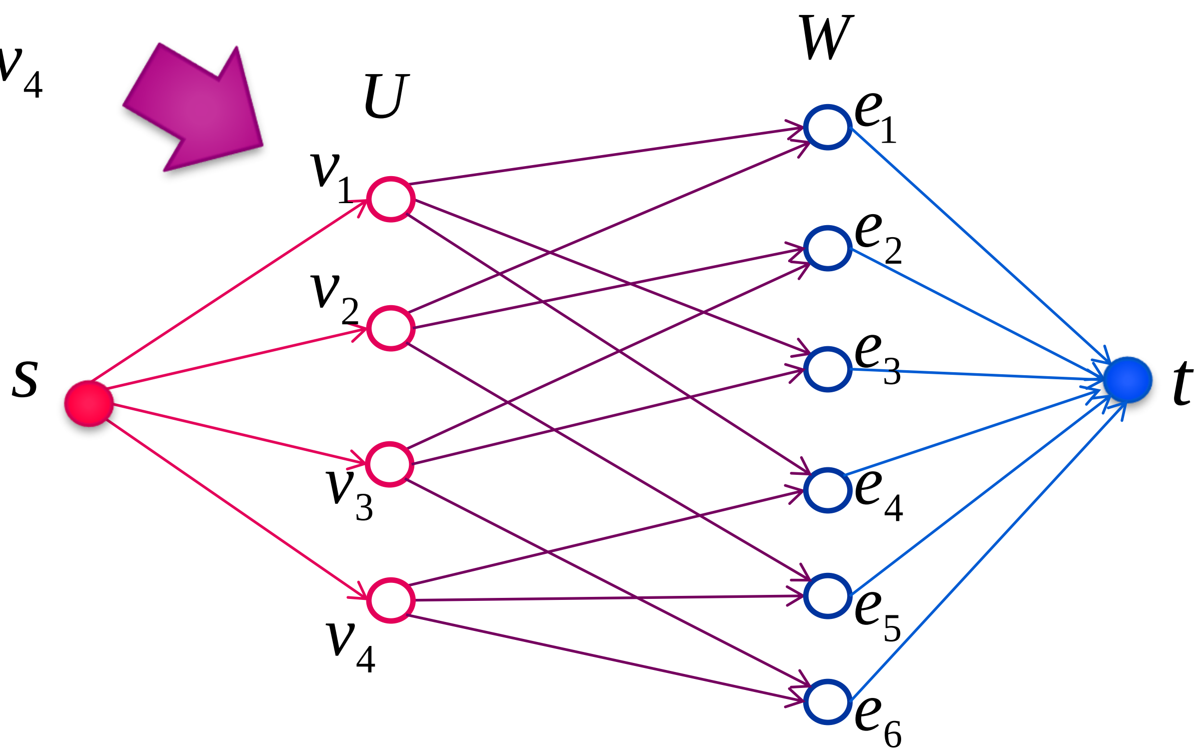
קשת עבור כל זוג קשת/קודקוד שסמוכים זה לזה בגרף המקורי.

קודקוד עבור כל קשת של הגרף המקורי.

# שאלה 3 : דוגמא

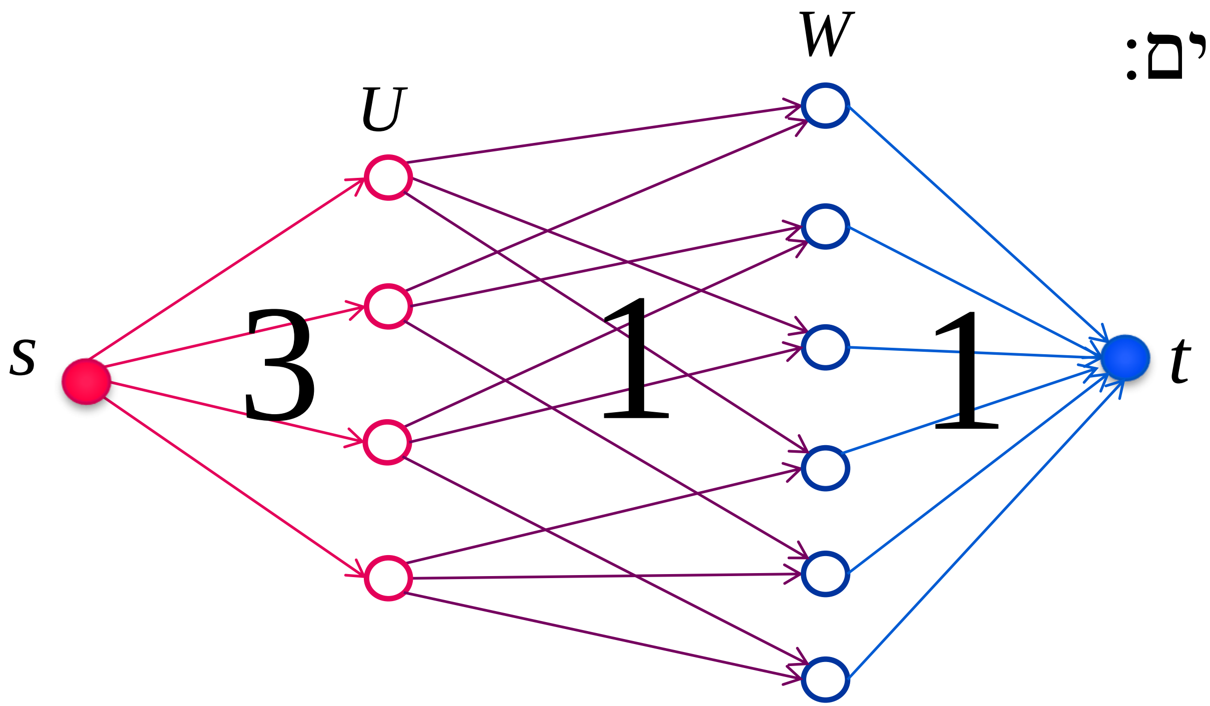
- נבנה רשת זרימה:



# שאלה 3 : פתרון

- עם קיבולים:




- קיים כיוון תקין של הגרף אם"ם גודל הזרימה המקסימאלית הינו $|E|$.

# הוכחת נכונות

- נניח שקיימת זרימה בגודל $|E|$ ונראה שקיים כיוונון תקין של הגרף:
  - בגרף המקורי, נכוון כל קשת $e_i$ כך שתצא מהקודקוד שמעביר אליה זרם ברשת הזרימה.
  - מכיוון שהזרימה בגודל $|E|$, כל קשתות הגרף יכוונו.
  - דרגת היציאה של קודקוד בגרף זהה לזרם שעובר דרכו ברשת. כיוון שלכל קודקוד יכולה להיכנס זרימה בגודל לכל היותר 3, לא קיים קודקוד עם דרגת יציאה גדולה מ-3.

# הוכחת נכונות

- נניח שקיים כיוונון תקין של הגרף ונראה שקיימת זרימה בגודל $|E|$:
  - נבנה זרימה בהתאם לכיוונון הגרף – אם בגרף הקשת $e_i$ יוצאת מקודקוד $v_j$, הקודקוד שמייצג את $e_i$ ברשת יקבל זרימה בגודל 1 מהקודקוד שמייצג את $v_j$.
  - מכיוון שבגרף לכל קודקוד דרגת יציאה $\leq 3$, מכל קודקוד בחלק השמאלי של הרשת תצא זרימה בגודל לכל היותר 3.
  - מכיוון שתגיע זרימה בגודל 1 לכל קודקוד בחלק הימני של הרשת, נקבל זרימה בגודל $|E|$.

# סיבוכיות

- גודל הרשת:
  - קודקודים – $|V'| = O(|V| + |E|)$.
  - קשתות – $|E'| = O(|V| + |E|)$.

- זמן הריצה:
  - הרצת דיניץ (לא 0-1) – $O(|V'|^2 |E'|) = O((|V| + |E|)^3)$.
  - כיוונון הקשתות בהתאם לזרימה – $O(|E|)$.
  - הרצת FF - $O(|E|(|V| + |E|))$.

# סיבוכיות

- כיצד ניתן לשפר את זמן הריצה?
  - נרצה לקבל רשת 0-1. לצורך כך, ניצור שלושה עותקים מכל קודקוד בצד השמאלי של הרשת. כעת נוכל לתת לקשתות שיוצאות מהמקור קיבול של 1.
  - קיבלנו רשת 0-1 שבה לכל קודקוד דרגת כניסה או יציאה של 1.
  - זמן ריצה משופר –

$$O\left(|E'|\sqrt{|V'|}\right)=O\left(\left(|V|+|E|\right)^{3/2}\right).$$