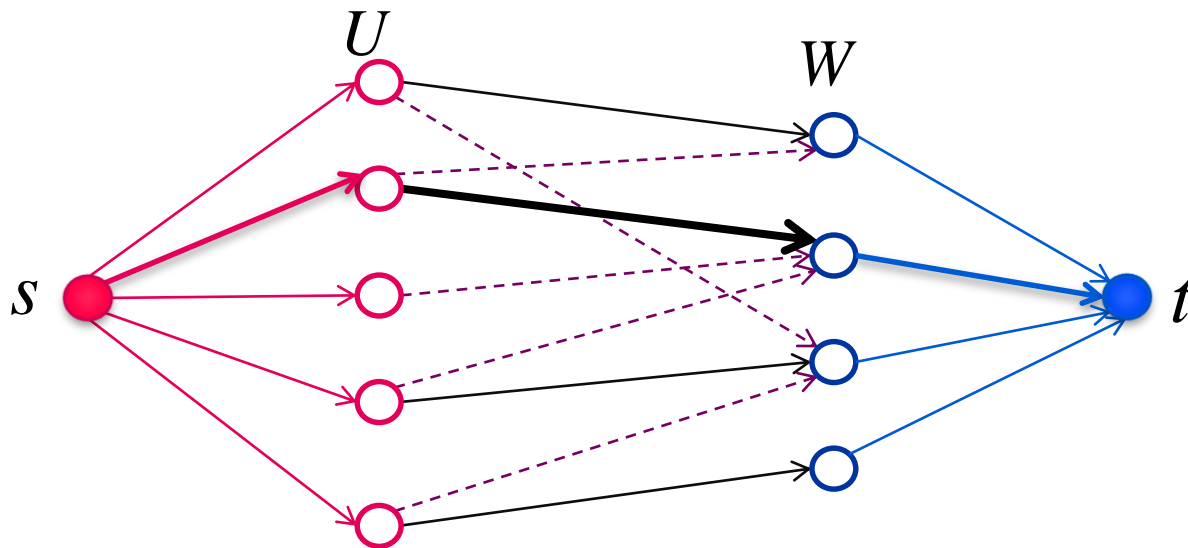
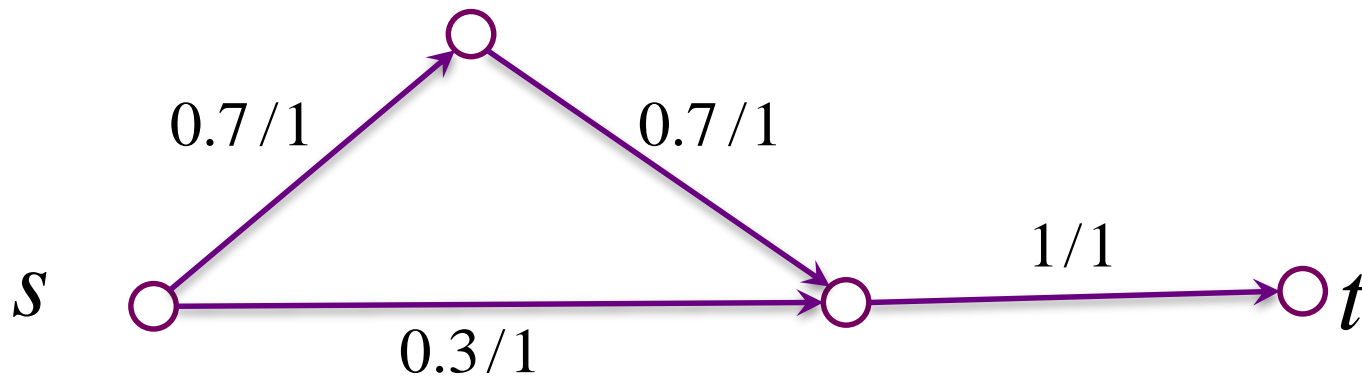


# תרגול 12 – עוד זרימה



# שאלה 1 – זרימה בשלמים

- תרגיל: נתונה רשת זרימה  $G=(V,E)$  מ- $s$  ל- $t$  עם קיבולים שלמים. הוכיחו שהשיטה של Ford-ו-Fulkerson מוצאת זרימה מקסימלית  $f$  כך שלכל  $u,v \in V$  הערך  $f(u,v)$  הינו שלם.



# Ford - Fulkerson – תזכורת

---

## **Ford-Fulkerson** ( $G, s, t$ )

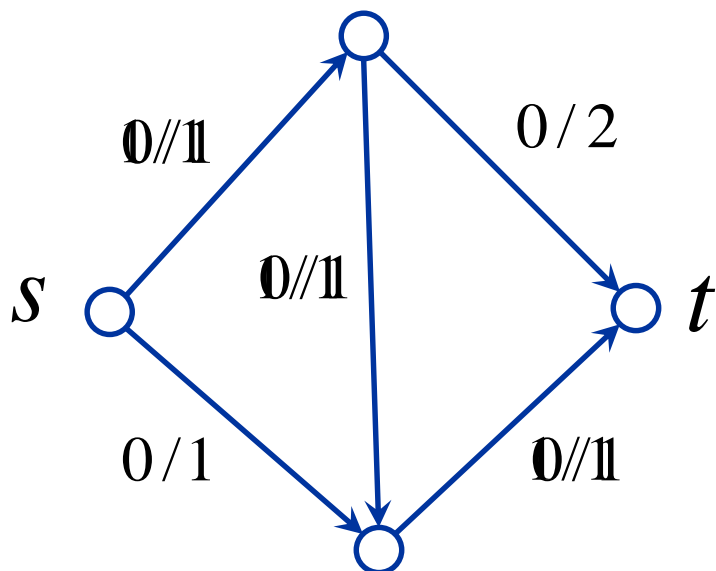
- 1) Initialize flow ( $f = 0$ ).
- 2) While there is an augmenting path  $p$ ,  
    Augment flow  $f$  along  $p$ .
- 3) Return  $f$ .

# תזכורת

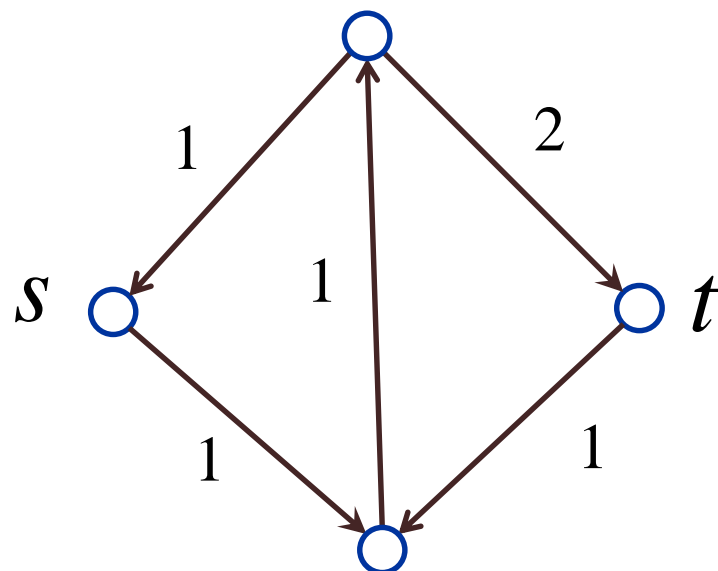
**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ )

- 1) Initialize flow ( $f = 0$ ).
- 2) While there is an augmenting path  $p$ ,  
Augment flow  $f$  along  $p$ .
- 3) Return  $f$ .

רשת זרימה



רשת שיורית



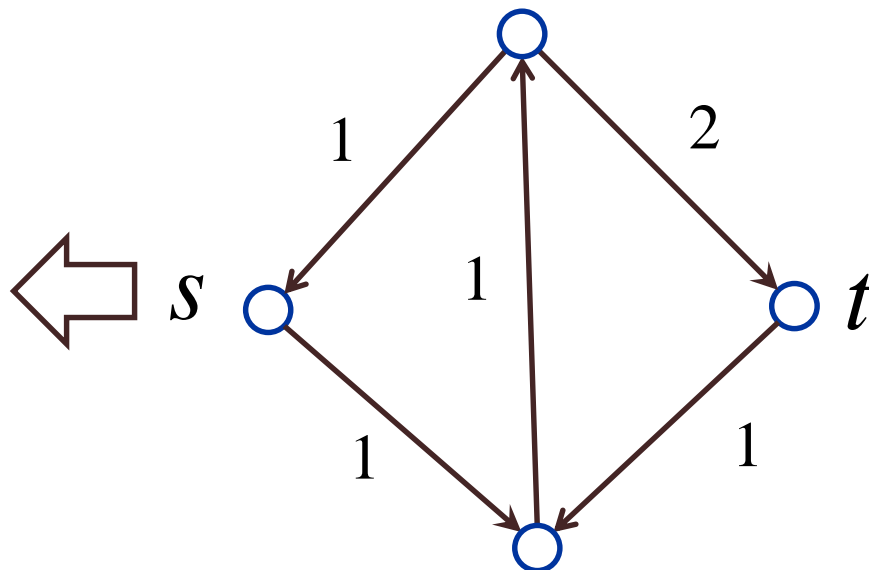
# תזכורת

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ )

- 1) Initialize flow ( $f = 0$ ).
- 2) While there is an augmenting path  $p$ ,  
Augment flow  $f$  along  $p$ .
- 3) Return  $f$ .

רשת זרימה

רשת שיורית

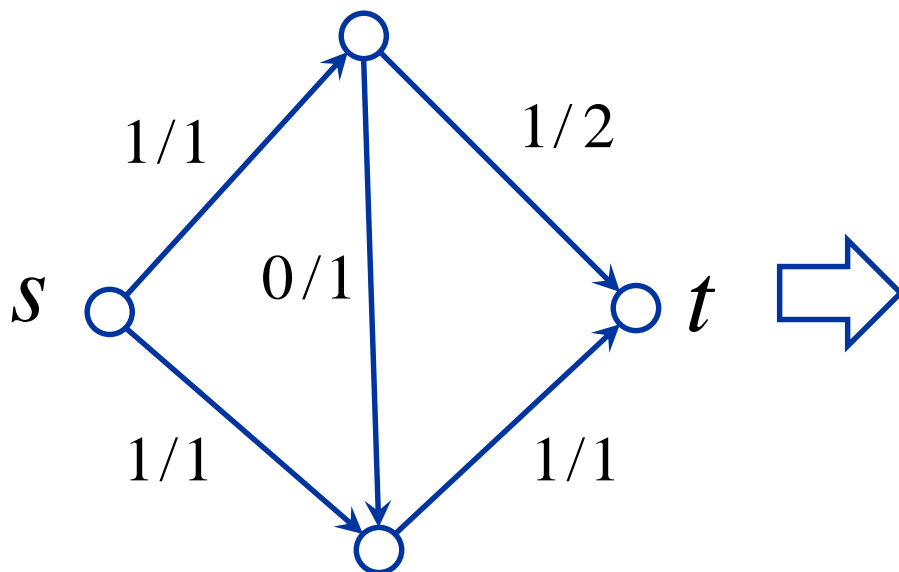


# תזכורת

**Ford-Fulkerson**( $G, s, t$ )

- 1) Initialize flow ( $f = 0$ ).
- 2) While there is an augmenting path  $p$ ,  
Augment flow  $f$  along  $p$ .
- 3) Return  $f$ .

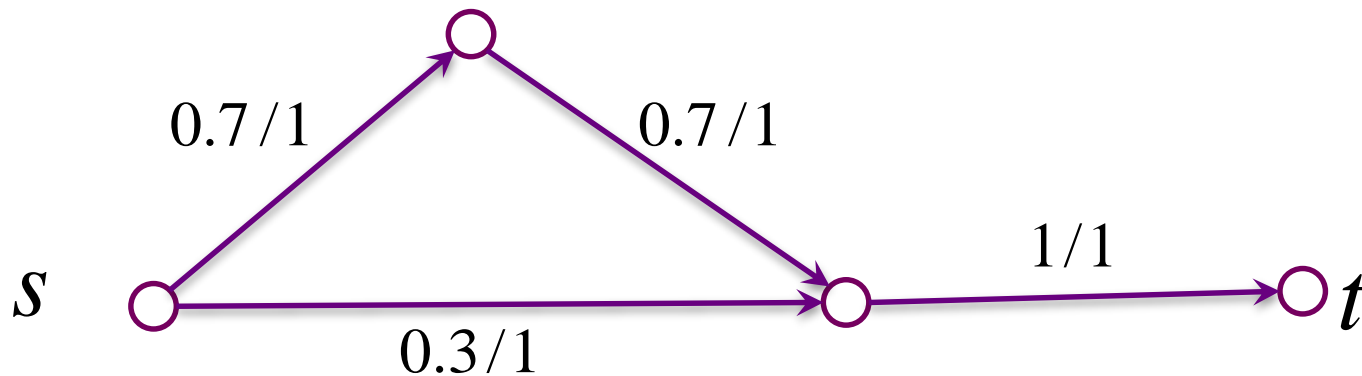
רשת זרימה



רשת שיורית

# שאלה 1 – זרימה בשלמים

- תרגיל: נתונה רשת זרימה  $G=(V,E)$  מ- $s$  ל- $t$  עם קיבולים שלמים. הוכיחו שהשיטה של Ford-ו-Fulkerson מוצאת זרימה מקסימלית  $f$  כך שלכל  $u,v \in V$  הערך  $f(u,v)$  הינו שלם.



# שאלה 1 – פתרון

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הזרימות שהאלגוריתם חיבר עד כה:

**בסיס האינדוקציה:** (מצאנו 0 מסלולים) לכל קשת יש זרימה 0. **צעד האינדוקציה:** עד כה מצאנו זרימה  $f$  שבה בכל קשת עוברת זרימה שלמה. יהי  $p$  מסלול ברשת השיורית של  $f$ . נראה שגם לאחר הוספת המסלול החדש  $p$  ל- $f$ , עדיין יש זרימה שלמה בכל קשת.

מההנחה, כל הקיבולים ברשת השיורית שלמים. גודל הזרימה שנעביר דרך  $p$  הינו הקיבול המינימאלי מקיבולי קשתות  $p$ , ולכן מדובר בערך שלם.

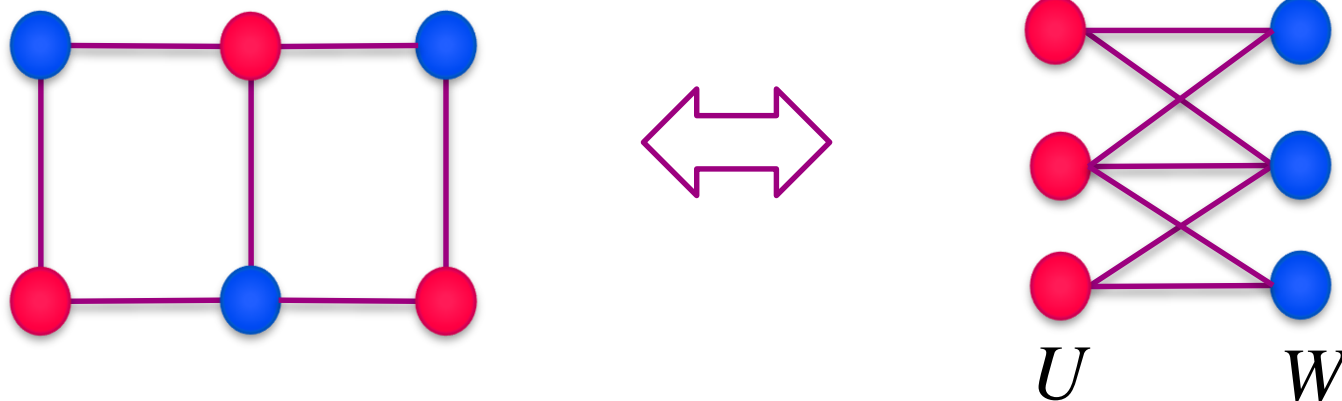
## שאלה 2 – סוסים ורוכבים

- תרגיל: יש מאה סוסים ומאה רוכבים. כל רוכב מכין רשימה של סוסים שהוא מוכן לרכב עליהם. מצא אלגוריתם שימצא את המספר המקסימאלי של סוסים ורוכבים שיוכלו לדהור אל החופש.



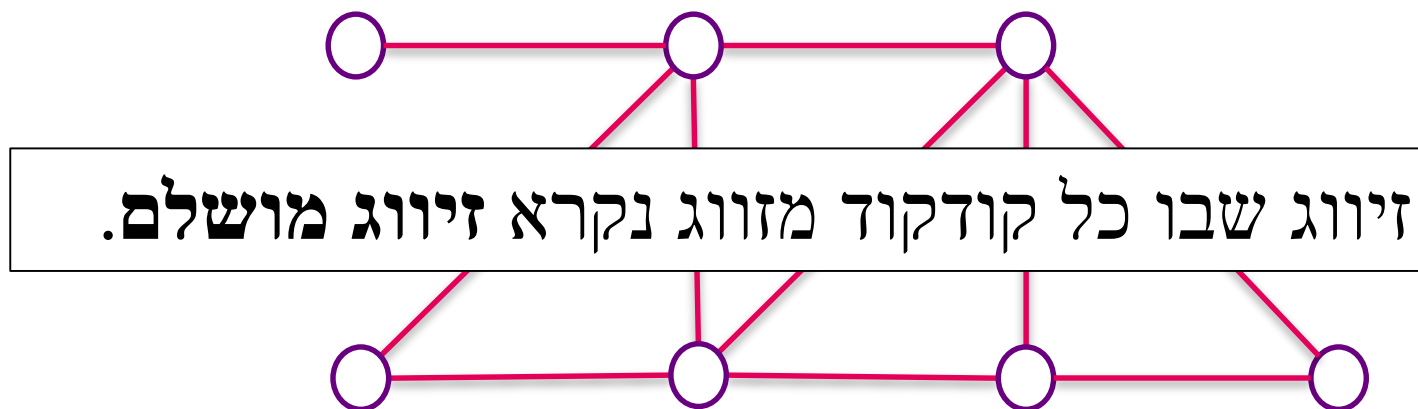
# תזכורת – גרף דו-צדדי

- הגדרה: גרף לא מכוון נקרא **דו צדדי** אם"מ אפשר לצבוע את קודקודיו בשני צבעים, כך שאף קשת לא מחברת בין שני קודקודים בעלי אותו צבע.
- אפשר להגדיר גרף דו צדדי בתור שלשה  $G = (U, W, E)$  כך ש- $U$  ו- $W$  הן שתי קבוצות זרות של קודקודים, ואין אף קשת בין שני קודקודים מאותה קבוצה.



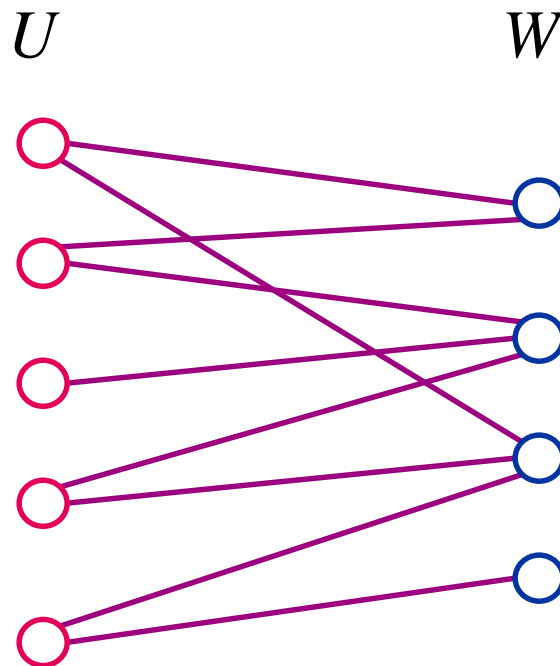
# זיווגים

- הגדרה: עבור גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , זיווג הינו קבוצת קשתות זרות בקודקודים  $S \subseteq E$ . גודל הזיווג הינו מספר הקשתות בקבוצה. זיווג מקסימום הינו זיווג עם מספר מקסימאלי של קשתות מבין הזיווגים שבגרף.



## שאלה 2 : ניסוח אחר

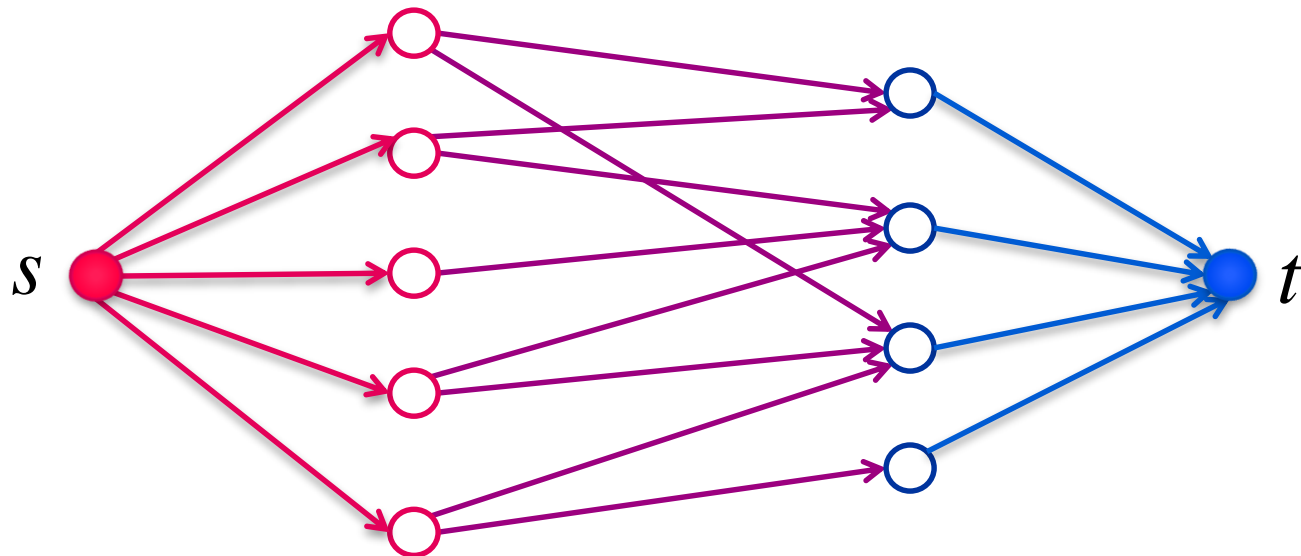
- תרגיל: נתון גרף דו-צדדי  $G = (U, W, E)$ . תארו אלג' המוצא זיווג מקסימום בגרף.



# שאלה 2 : פתרון

נהפוך את  $G$  לרשת זרימה:

- נכוון את כל הקשתות מ- $U$  ל- $W$ .
- נוסיף קודקוד  $s$  וניצור קשתות ממנו לכל קודקודי  $U$ .
- נוסיף קודקוד  $t$  וניצור קשתות אליו מכל קודקודי  $W$ .
- ניתן לכל הקשתות קיבול 1.



# המשך פתרון

- קיבלנו רשת זרימה (רשת 0-1). נריץ עליה אלג' למציאת זרימה מקסימאלית מ- $s$  ל- $t$ .

- בניית רשת הזרימה לוקחת זמן לינארי, ולכן זמן הריצה תלוי רק באלג' למציאת זרימה מקסימאלית.

- בשיעור נראה שבמקרה כזה האלג' של דיניץ רץ בזמן

$$O(|E|\sqrt{|V|})$$

- נוכיח שגודל הזרימה המקסימאלית שווה לגודל הזיווג המקסימום, ושקבוצת הקשתות הרוויות מ- $U$  ל- $W$  הינה זיווג מקסימום.

# הוכחה (המשך)

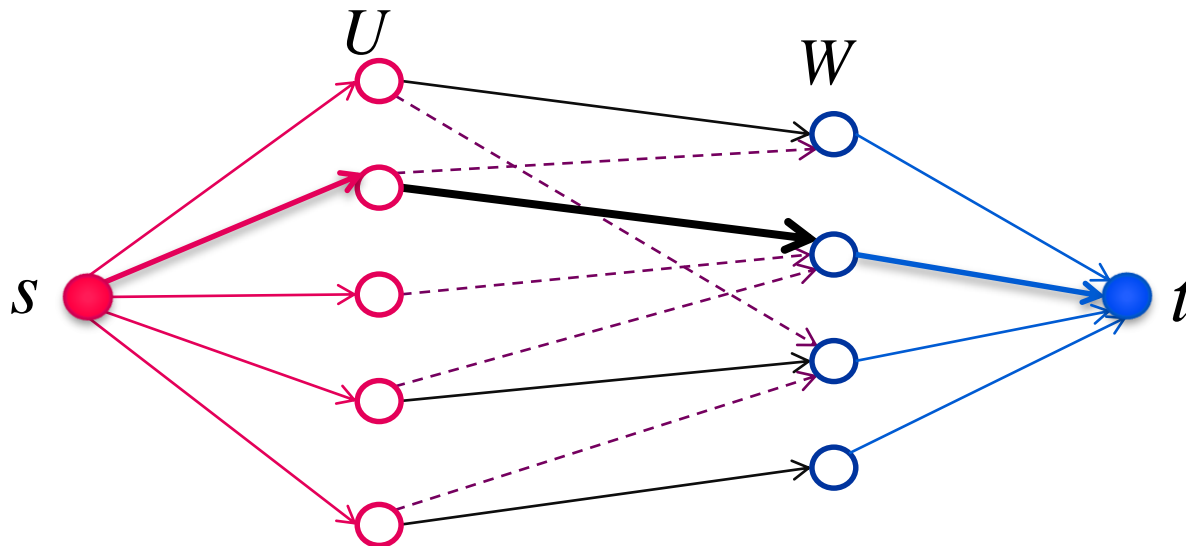
נראה שגודל הזרימה המקסימלית  $f$  שווה לגודל הזיווג המקסימום  $m$ :

- $|f| \geq m$ : לכל זיווג ניתן למצוא זרימה מתאימה באותו גודל באופן הבא. עבור כל קשת  $(u, w)$  בזיווג, נעביר זרם 1 דרך הקשתות  $(s, u), (u, w), (w, t)$ .

# הוכחה (המשך)

נראה שגודל הזרימה המקסימלית  $f$  שווה לגודל הזיווג המקסימום  $m$ :

- $|f| \leq m$ : בהינתן זרימה שלמה, נוכל לקחת רק את הקשתות שלה מ- $U$  ל- $W$  ולקבל את הזיווג המתאים.



# הוכחה (המשך)

- מצאנו התאמה בין הזרימות השלמות לזיווגים האפשריים. גודל זיווג יהיה זהה לגודל הזרימה שמתאימה לו.
- זרימה מקסימאלית תתאים לזיווג מקסימום.

זהו אלגוריתם כללי למציאת זיווג מקסימום בגרף דו"צ

## שאלה 3 – מכונות ומשימות

- תרגיל: נתונות  $n$  מכונות ו- $m$  משימות שצריכות להתבצע ע"י המכונות. מכונה  $i$  יכולה לבצע  $n_i$  משימות. בנוסף, עבור כל משימה נתונה רשימה של מכונות שיודעות לבצע אותה. תארו אלג' אשר בוחר לכל משימה את המכונה שתבצע אותה (תחת ההגבלות הנ"ל), או מודיע שלא קיימות השמה כזו.

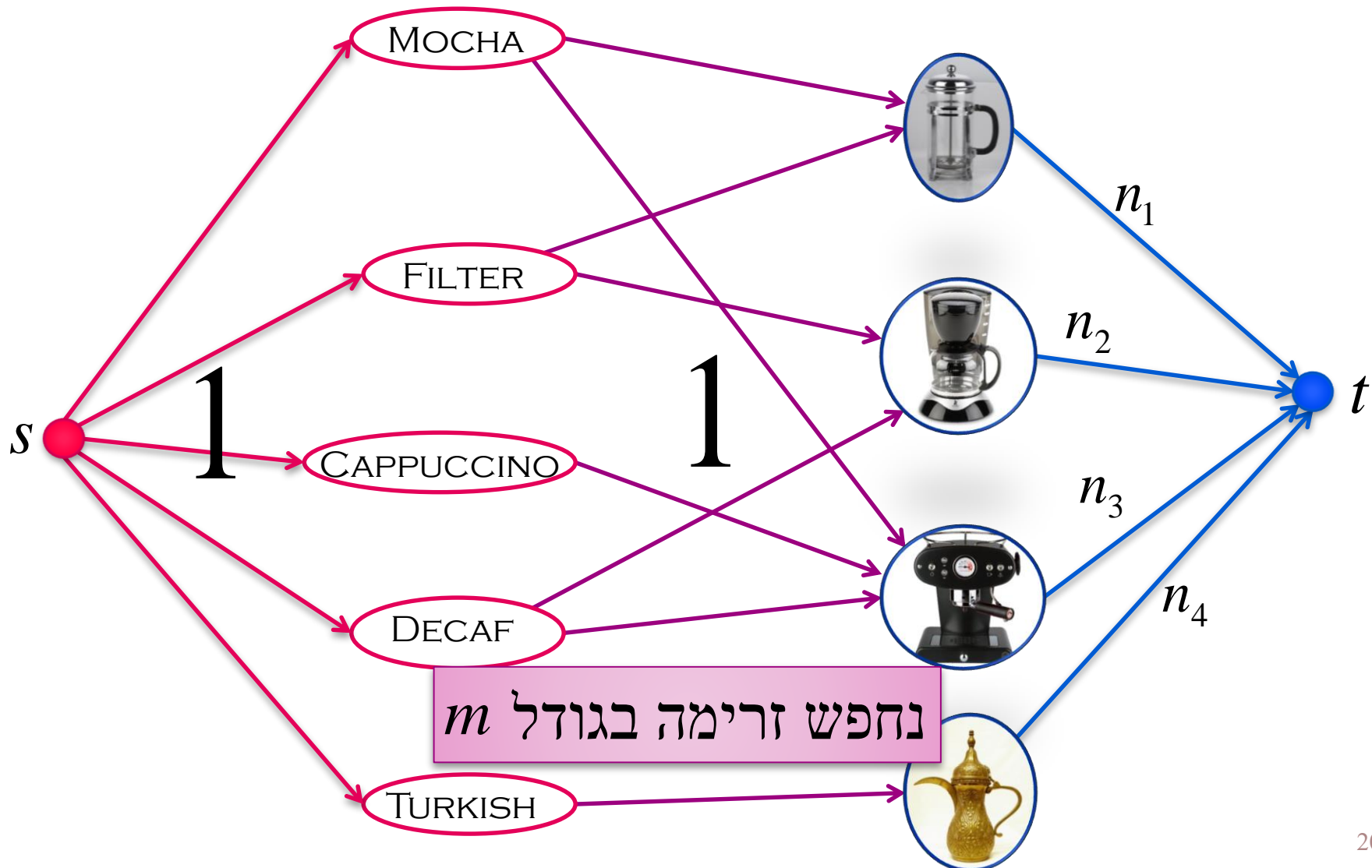
# שאלה 3 – דוגמא

- תרגיל: נתונות  $n$  מכונות ו- $m$  משימות שצריכות להתבצע ע"י המכונות. מכונה  $i$  יכולה לבצע  $n_i$  משימות. בנוסף, עבור כל משימה נתונה רשימה של מכונות שיודעות לבצע אותה. תארו אלג' אשר בוחר לכל משימה את המכונה שתבצע אותה (תחת ההגבלות הנ"ל), או מודיע שלא קיימות השמה כזו.

CAFFÈ LATTE  
CAPPUCCINO  
DECAF  
DOPPIO  
ESPRESSO  
FILTER  
HALF-CAF  
RASPBERRY MOCHA  
RED EYE  
TURKISH COFFEE



# פתרון

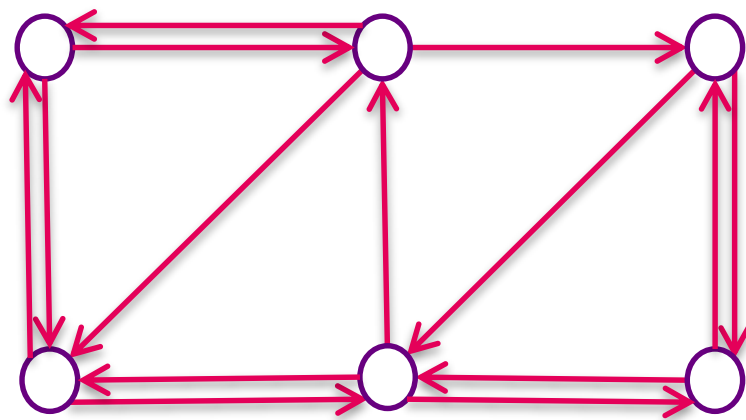


# סיבוכיות

- נסמן את סך אורכי הרשימות של המשימות ב-  $M$ .
- גודל רשת הזרימה:
  - האם זו רשת 0-1? לא!
  - מספר הקודקודים –  $m + n + 2$ .
  - מספר הקשתות –  $m + n + M$ .
- האלג' של דיניץ ירוץ בזמן  $O(|E||V|^2) = O((m + n + M)(m + n)^2)$ .
- ניתן להריץ FF בזמן  $O(m(m + n + M))$ .

# k - קשירות

- הגדרה: גרף מכוון נקרא  $k$ -קשיר אם בין כל זוג קודקודים שלו יש לפחות  $k$  מסלולים זרים בקשתות (בכל כיוון).



גרף 2-קשיר

## שאלה 4

---

- תרגיל: נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  וקבוע  $k$ .  
תארו אלג' אשר בודק האם  $G$  הוא  $k$ -קשיר.

# פתרון

- ניסיון ראשון:
  - עבור כל זוג קודקודים  $v, u \in V$ , נבדוק האם יש ביניהם  $k$  מסלולים זרים בקשתות (בשני הכיוונים).
  - ראינו בתרגול הקודם איך לעשות את זה באמצעות זרימה ברשתות 0-1.

- סיבוכיות -  $O(|V|^2 |E| \min \{ |V|^{2/3}, |E|^{1/2} \})$

מספר הפעמים שצריך  
למצוא זרימה מקסימאלית.

# שיפור הפתרון

- אין צורך למצוא זרימה מקסימאלית. צריך רק לבדוק האם קיימת זרימה בגודל  $k$ .
- נוכל להריץ את האלג' של Ford-Fulkerson ולעצור לאחר  $k$  מסלולים משפרים.
- סיבוכיות -  $O(k|V|^2|E|)$

## עוד שיפור

- נבחר קודקוד כלשהו  $v \in V$  ונבדוק שיש  $k$  מסלולים זרים בינו לבין כל אחד מהקודקודים האחרים (בשני הכיוונים).

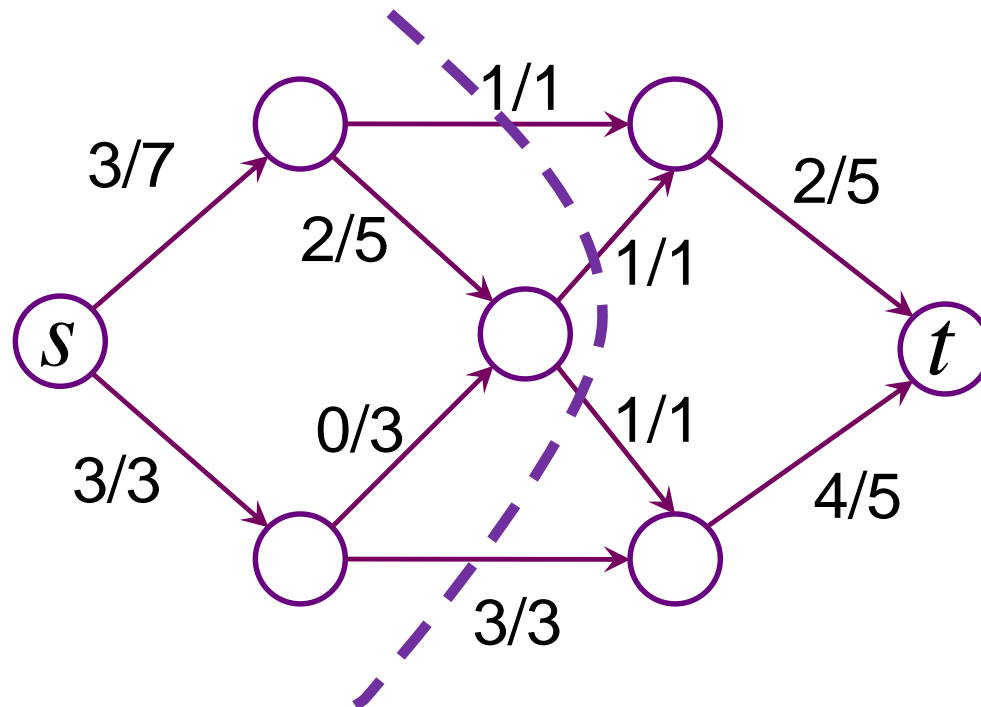
- סיבוכיות -  $O(k|V||E|)$ .

# הוכחת נכונות

- נראה שהבדיקות שהאלג' מבצע נכשלות אם"ם הגרף אינו  $k$ -קשיר.
- **כיוון ראשון:** אם אחת הבדיקות שהאלג' ביצע נכשלה, ברור שהגרף אינו  $k$ -קשיר.
- **כיוון שני:** אם קיימים  $u, w \in V$  כך שאין  $k$  מסלולים זרים בקשתות מ- $u$  ל- $w$ :
  - קיים חתך  $u \in S, w \in T$  שגודלו קטן מ- $k$ .
  - אם  $v \in S$  אז זהו גם חתך מ- $v$  ל- $w$ , ולכן בדיקת המסלולים מ- $v$  ל- $w$  תכשל.
  - אחרת,  $v \in T$ , ובדיקת המסלולים מ- $u$  ל- $v$  תכשל.

# שאלה 5 - מציאת חתך מינימאלי

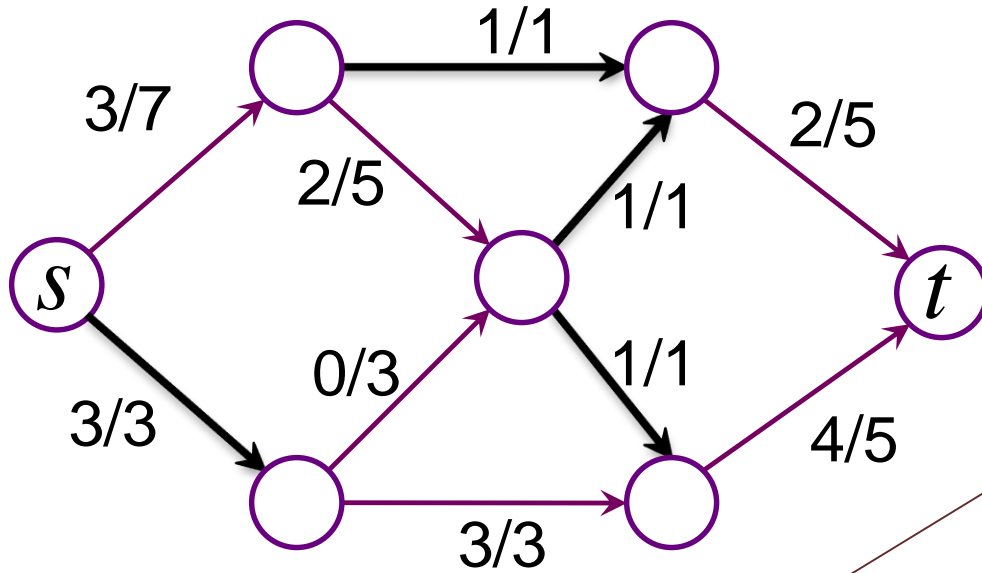
- תרגיל: נתונה רשת זרימה  $G = (V, E)$  וזרימה מקסימאלית  $f$ . תארו אלג' למציאת חתך מינימאלי של הרשת.



## שאלה 5 - פתרון

- נבנה את הרשת השיורית ביחס לזרימה  $f$ .
- נריץ BFS מהמקור ונכניס את כל הקודקודים שבעץ ה-BFS לתוך  $S$ .
- שאר הקודקודים יהיו ב-  $T$ .
- זמן ריצה –  $O(|V| + |E|)$ .

# דוגמא



רשת זרימה

רשת שיורית

# הוכחת נכונות

- נכונות: נראה שהחתך שקיבלנו מינימאלי.
  - ממשפט ה- $\max\text{-flow min-cut}$ , חתך הוא מינימאלי אם"ם הוא בגודל  $|f|$ . נראה שגודל החתך שמצאנו,  $|f| = c$ .
  - כל הקשתות של החתך שמצאנו רוויות. (אם הייתה בחתך קשת שאינה רוויה, אז צריך להוסיף את הקודקוד שהיא מובילה אליו ל- $S$ ).
  - אין זרימה מ- $T$  ל- $S$ . אם הייתה, אז ברשת השיורית הייתה קשת לא רוויה מ- $S$  ל- $T$ . לכן, כיוון שסך הזרימה בכל חתך הוא  $|f|$ , ויש זרימה רק בכיוון אחד של החתך,  $|f| = c$ .