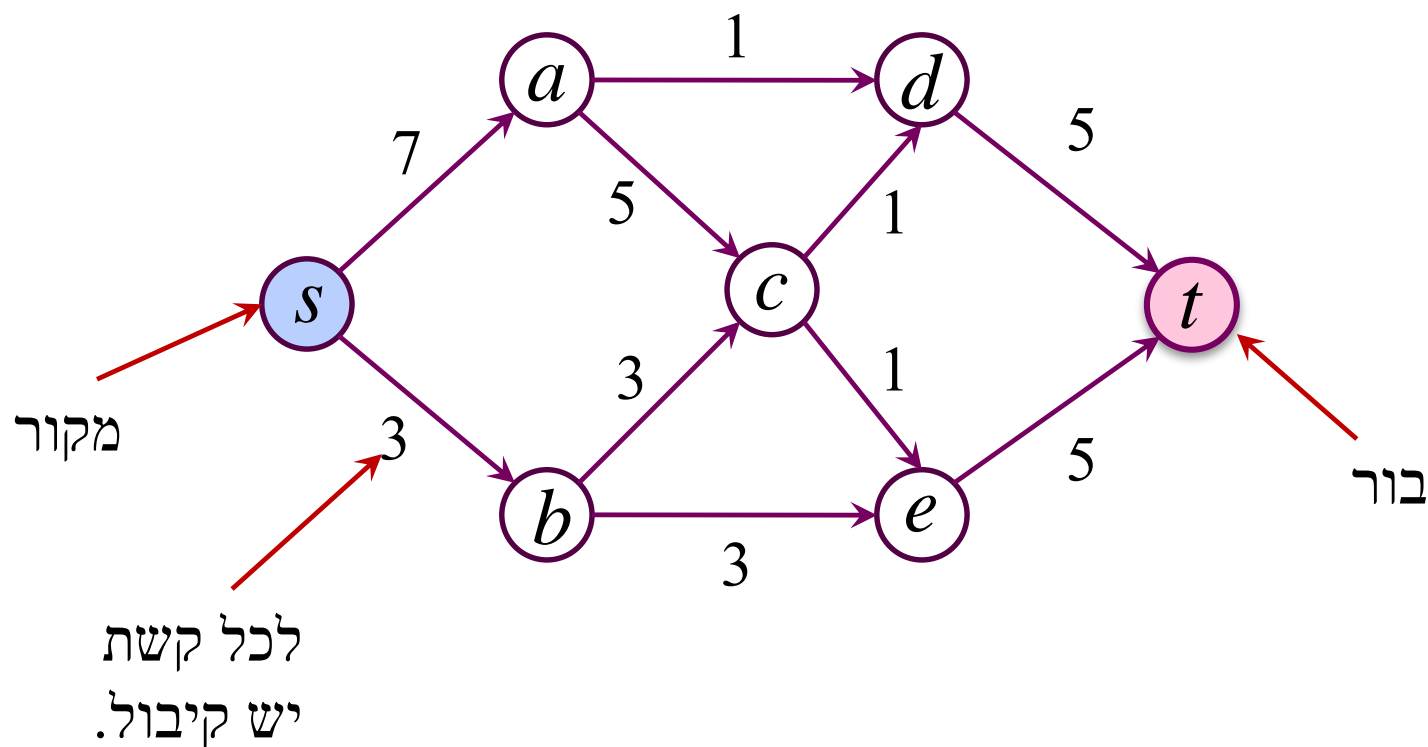


תרגול 11 - זרימה



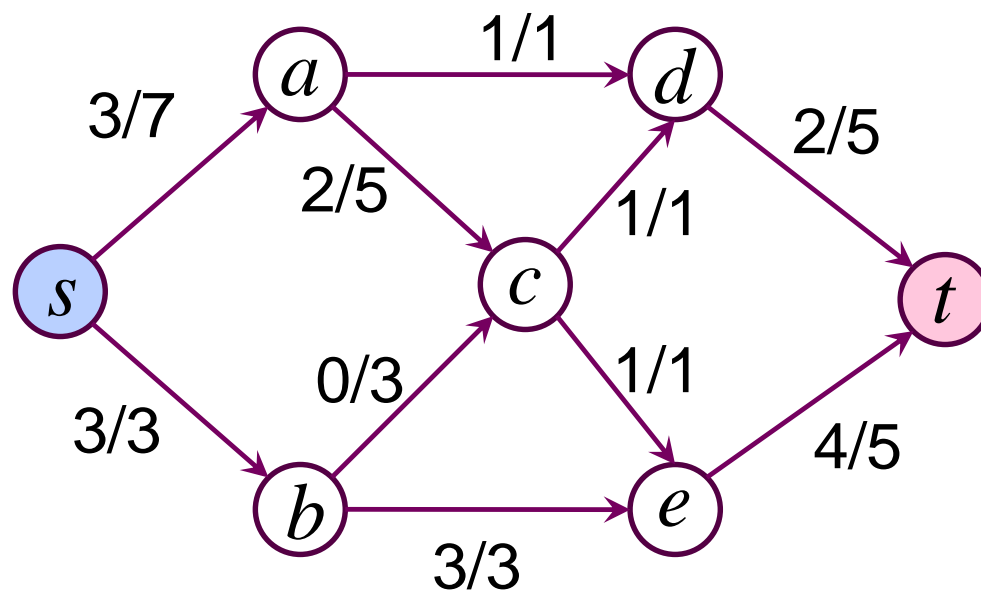
**Only dead fish
go with the flow**

תזכורת – רשת זרימה



- רוצים למצוא זרימה מקסימאלית מהמקור אל הבור, אשר מקיימת את אילוצי הקיבולים.

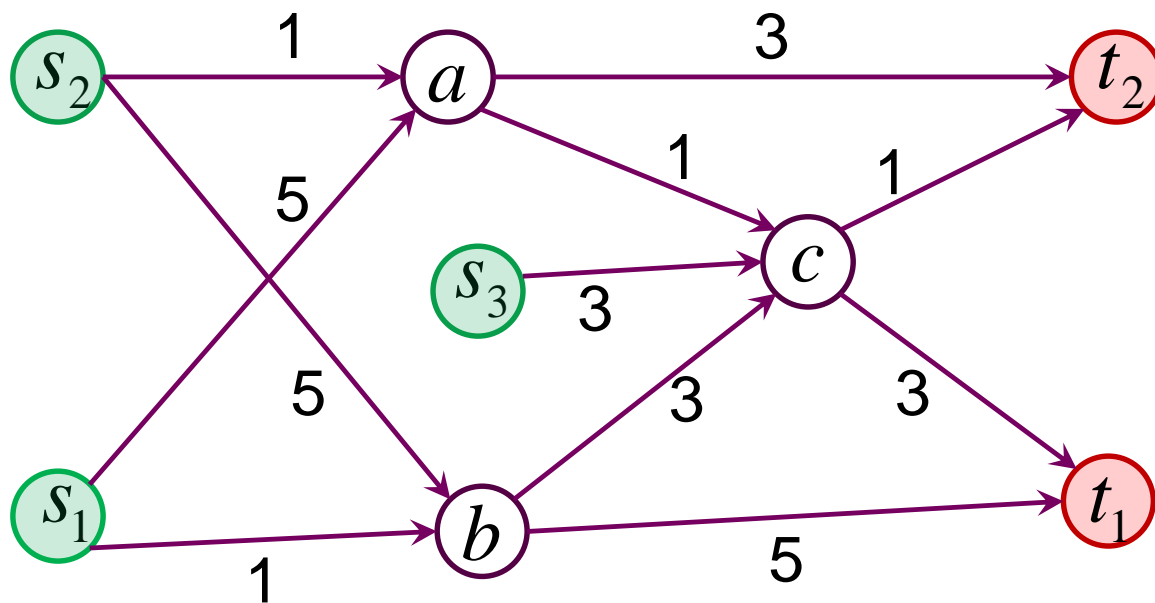
דוגמא – זרימה מקסימלית



- גודל הזרימה המקסימלית הוא 6.

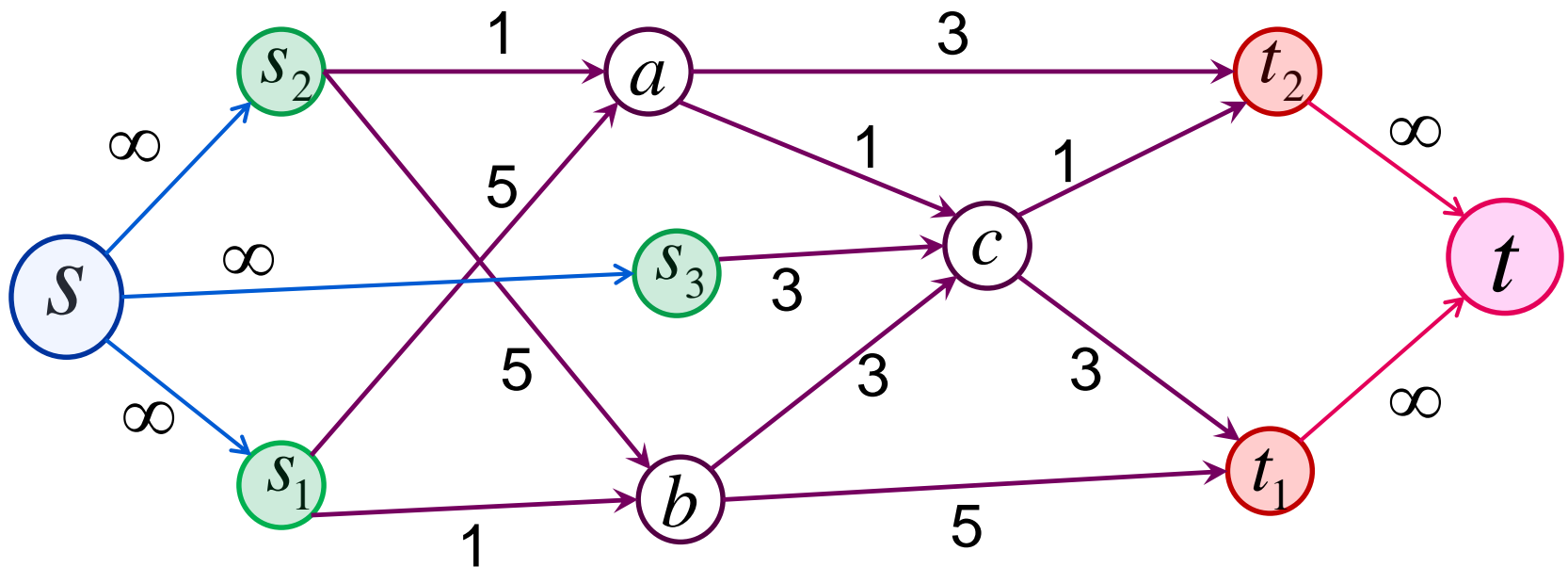
שאלה 1 – מספר מקורות ובורות

- תרגיל: נתונה רשת זרימה עם מספר מקורות ומספר בורות. הראו שניתן למצוא זרימה מקסימלית על ידי שימוש באלג' לבעיה המקורית (עם מקור אחד ובור אחד).



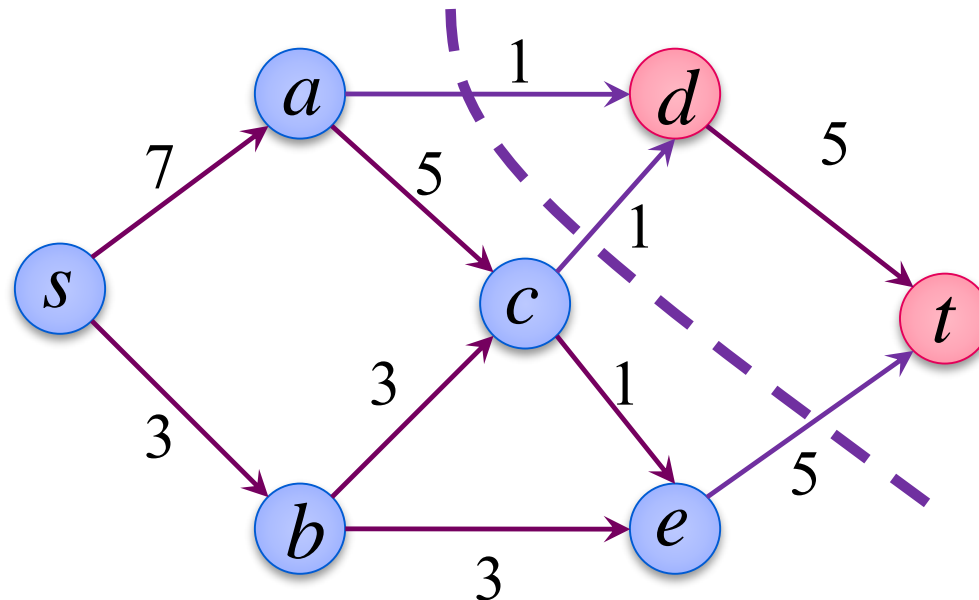
פתרון

- נוסיף "מקור על", ונוסיף קשתות ממקור העל לכל המקורות האחרים. לקשתות אלו יהיה קיבול אינסופי. באופן דומה, נוסיף "בור על".

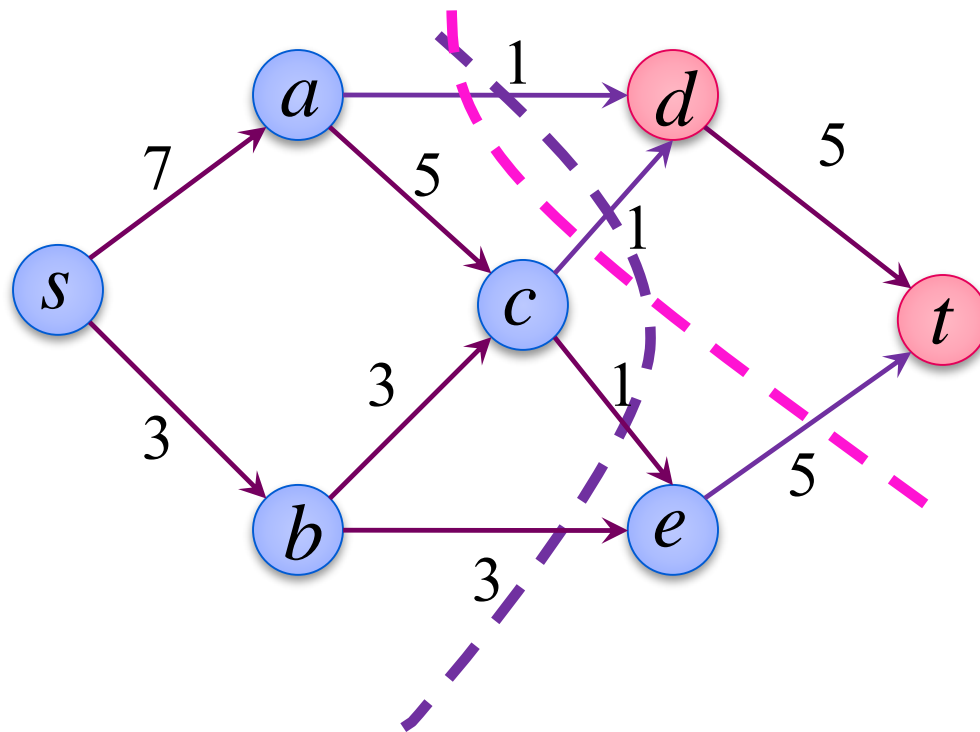


תזכורת - חתכים

- חתך הוא חלוקה של קודקודי הגרף לשתי קבוצות $S, T \subset V$ כך שכל קודקוד הוא איבר ב- S או ב- T .
- גודל החתך הינו סכום קיבולי הקשתות שעוברות מקודקודי S לקודקודי T .



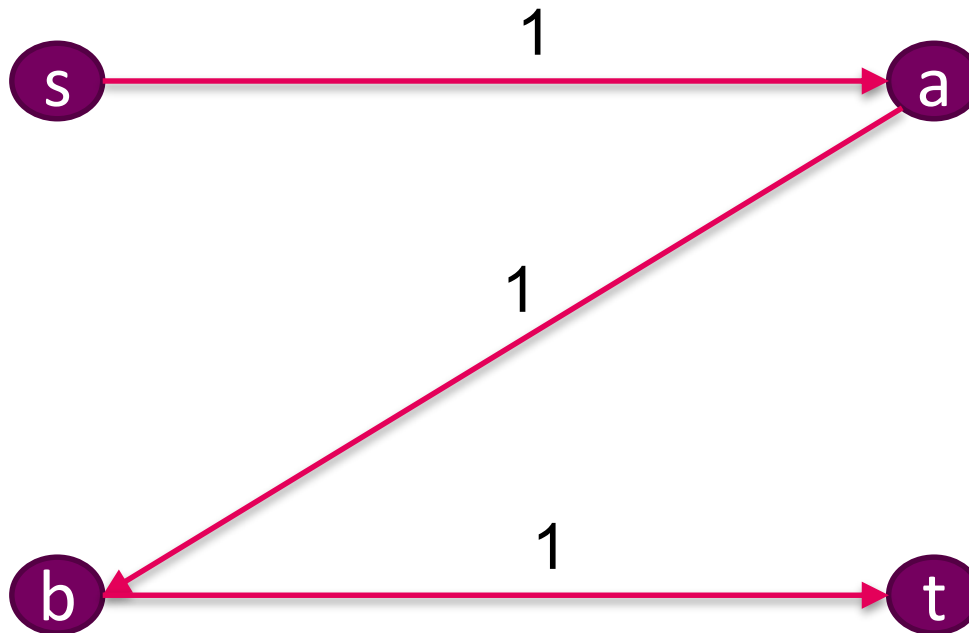
החתך המינימלי



גודל החתך – 7.

גודל החתך – 6.

דוגמת עזר

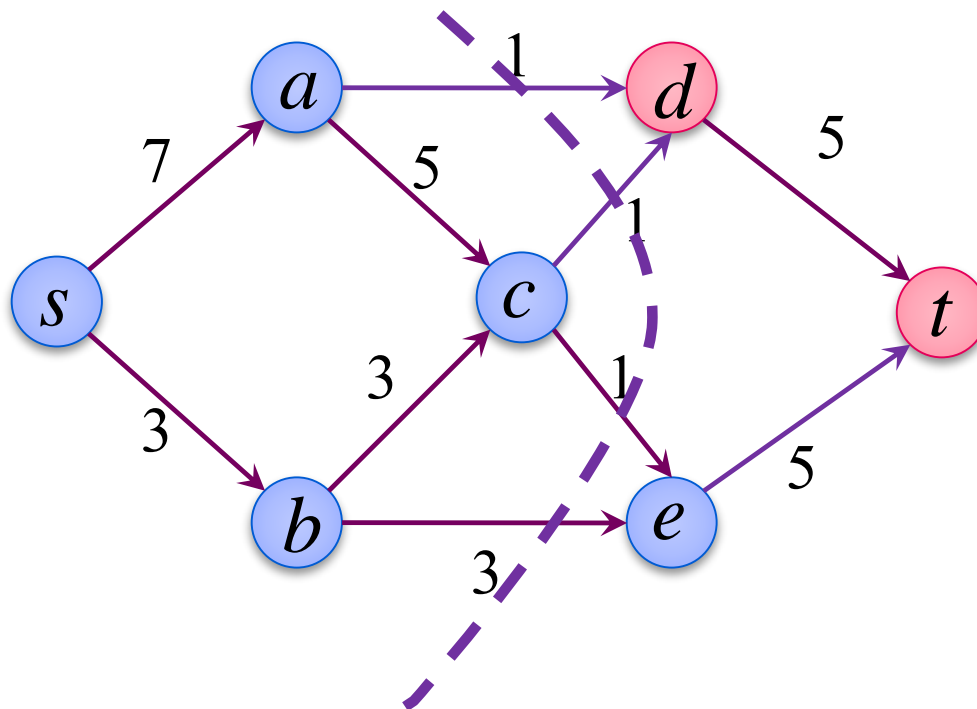


- אילו חתכים יש ברשת זו ומה גודלם?
- בהינתן זרימה, מה גודל הזרימה שעובר בכל חתך?

חתך מינימאלי - זרימה מקסימאלית

• Max Flow - Min Cut Theorem:

- בכל רשת זרימה, גודל החתך המינימאלי שווה לגודל הזרימה המקסימאלית (הוכח בשיעור).



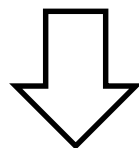
שאלה 2 – זרימה בשלמים

- תרגיל: נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ מ- s ל- t עם קיבולים שלמים. הוכיחו שערך הזרימה המקסימלית שלם.

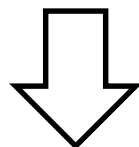


פתרון

כל הקיבולים ברשת שלמים.

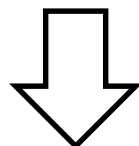


הערך של כל חתך ברשת שלם.



הערך של החתך המינימאלי שלם.

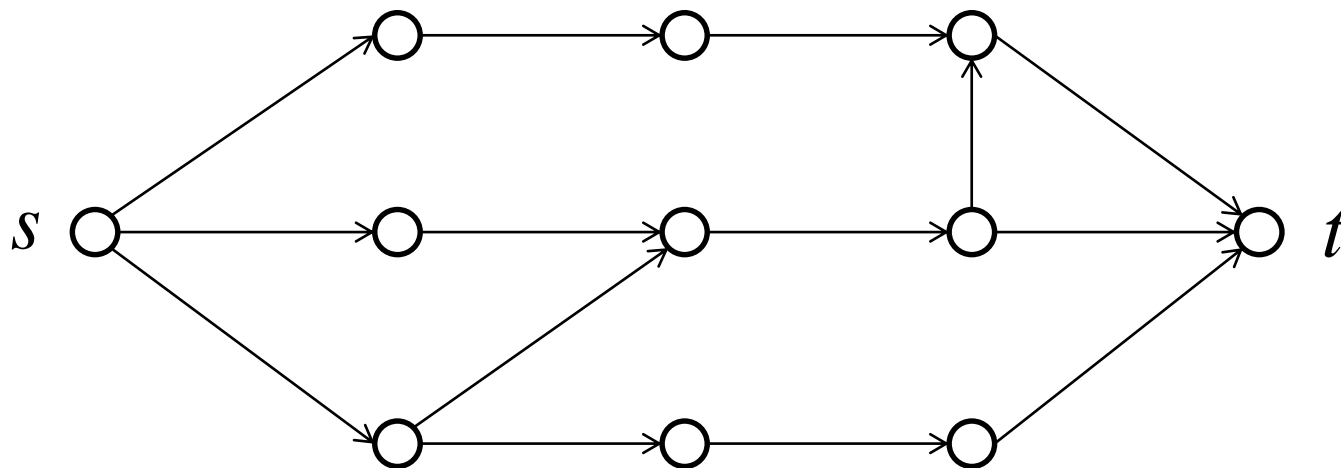
Max flow - min cut



ערך הזרימה המקסימאלית שלם.

שאלה 3 – מסלולים זרים בקשתות

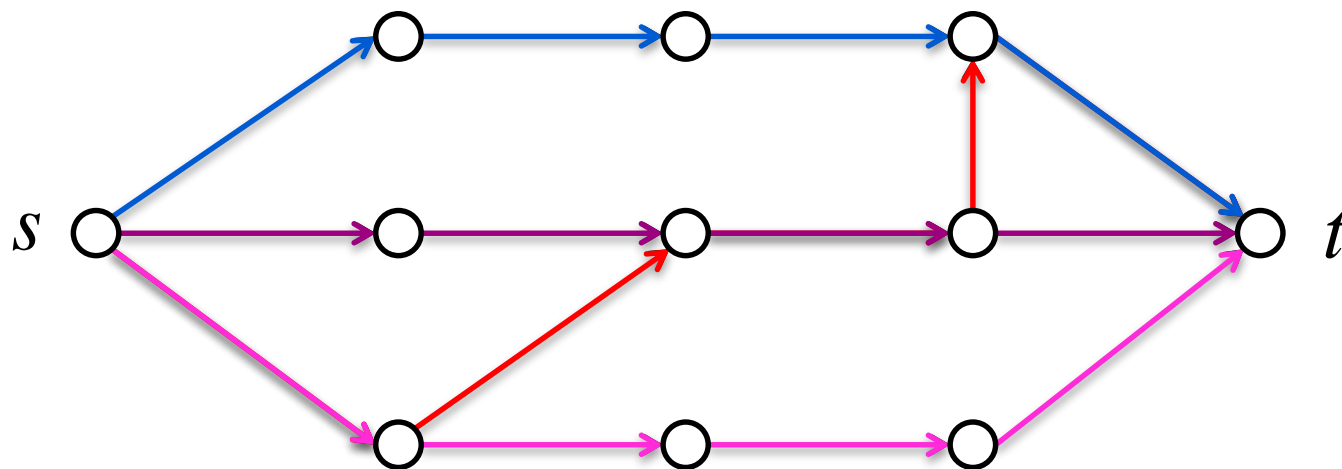
- תרגיל: נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ וצמתים $s, t \in V$. תארו אלג' אשר מוצא את המספר המקסימאלי של מסלולים זרים בקשתות מ- s ל- t .



שאלה 3 – דוגמא

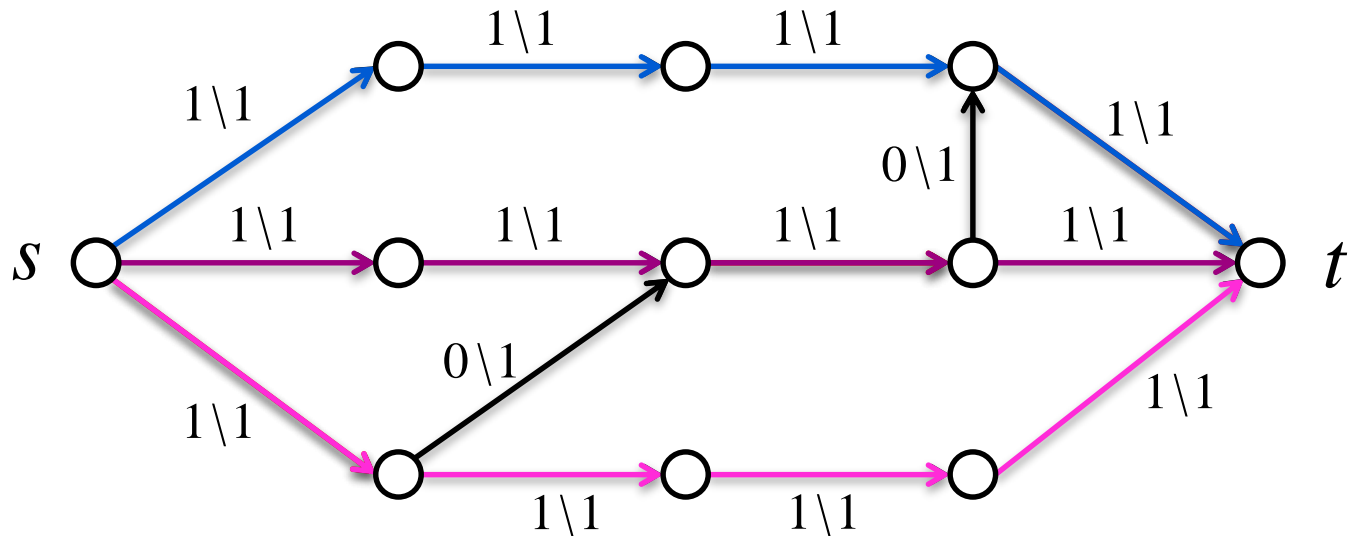
• הפתרון הוא לפחות 1.

• הפתרון הוא 3.



פתרון

- (1) ניתן לכל קשת קיבול 1 (הרשת שנקבל נקראת רשת 0-1)
- (2) נמצא זרימה מקסימאלית מ- s ל- t
- בשיעור נראה אלג' עבור רשתות 0-1 שרץ בזמן $O(|E| \min \{ |V|^{2/3}, |E|^{1/2} \})$.



הוכחת נכונות

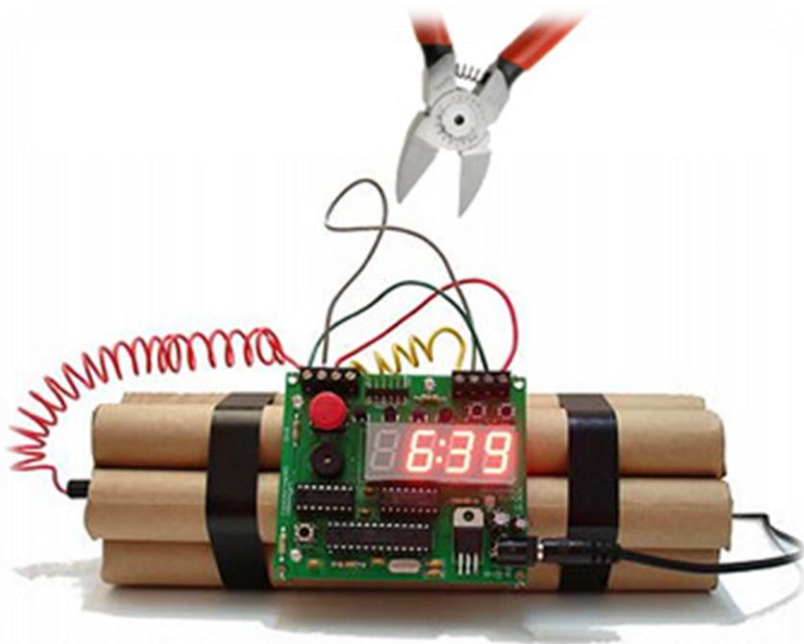
- עבור רשת 0-1 עם זרימה מקסימאלית f ומספר מקסימאלי של מסלולים זרים k , נוכיח שמתקיים $|f| = k$.
- $|f| \geq k$: ניתן להעביר זרם בגודל 1 דרך כל אחד מהמסלולים הזרים ולקבל זרימה בגודל k .
- $|f| \leq k$: נוכיח באמצעות אינדוקציה על $|f|$:
 - בסיס האינדוקציה – קל לראות שהטענה מתקיימת כאשר $|f| = 0$

הוכחת נכונות (המשך)

- צעד האינדוקציה (צ"ל $m = |f| \leq k$):
 - ניקח זרימה מקסימאלית (נוכיח בשבוע הבא שניתן להניח שבכל קשת עוברת זרימה שלמה).
 - נזרוק מהגרף את כל הקשתות שהזרימה דרכן היא 0.
 - נמצא מסלול כלשהו מ- s ל- t (קיים כזה מסלול כיוון ש- $|f| > 0$), ונזרוק את קשתות המסלול מהגרף.
 - קיבלנו גרף עם זרימה מקסימאלית בגודל $m - 1$.
 - מהנחת האינדוקציה, קיבלנו גרף עם לפחות $m - 1$ מסלולים זרים.
 - נוסיף את המסלול שזרקנו ונקבל שבגרף לפחות m מסלולים זרים.

שאלה 4 – קשתות מנתקות

- תרגיל: נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ וצמתים $s, t \in V$. תארו אלגוריתם אשר מוצא את מספר הקשתות המינימאלי שיש להסיר מהגרף על מנת שלא יהיה מסלול מ- s ל- t .



פתרון

- כמו בשאלה הקודמת, ניתן לכל קשת קיבול 1 ונמצא זרימה מקסימאלית מ- s ל- t .
- סיבוכיות הזמן נותרת

$$O\left(|E| \min \left\{ |V|^{2/3}, |E|^{1/2} \right\}\right)$$

- טענה: המספר המינימאלי של קשתות שיש להסיר מהגרף = גודל החתך המינימאלי.
- לכן ממשפט $\text{Max flow} - \text{Min cut}$ האלגוריתם נכון.

הוכחת נכונות

- גודל החתך המינימאלי – k .
- מספר הקשתות המינימאלי שיש להסיר – l .
- $l \leq k$: יהי (S, T) חתך בגודל k בגרף. אם נסיר את כל הקשתות החוצות שלו, ננתק את הגרף.
- $l \geq k$: תהי A קבוצת קשתות מנתקות בגודל l . בגרף $G' = (V, E \setminus A)$ בהכרח אין מסלול מ- s ל- t .
נסמן $S = \{v \mid \exists p: s \rightarrow v \text{ in } G'\}$ ו- $T = V \setminus S$.
קב' הקשתות שחוצות את (S, T) ב- G מוכלת ב- A ולכן זהו חתך שגודלו לכל היותר l .

סיכום ביניים לרשת 0-1

- יש שיוויון בין:
 - ערך הזרימה המקסימלית
 - גודל החתך המינימלי
 - המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות
 - מספר הקשתות המינימלי שיש להסיר בכדי לנתק את הגרף

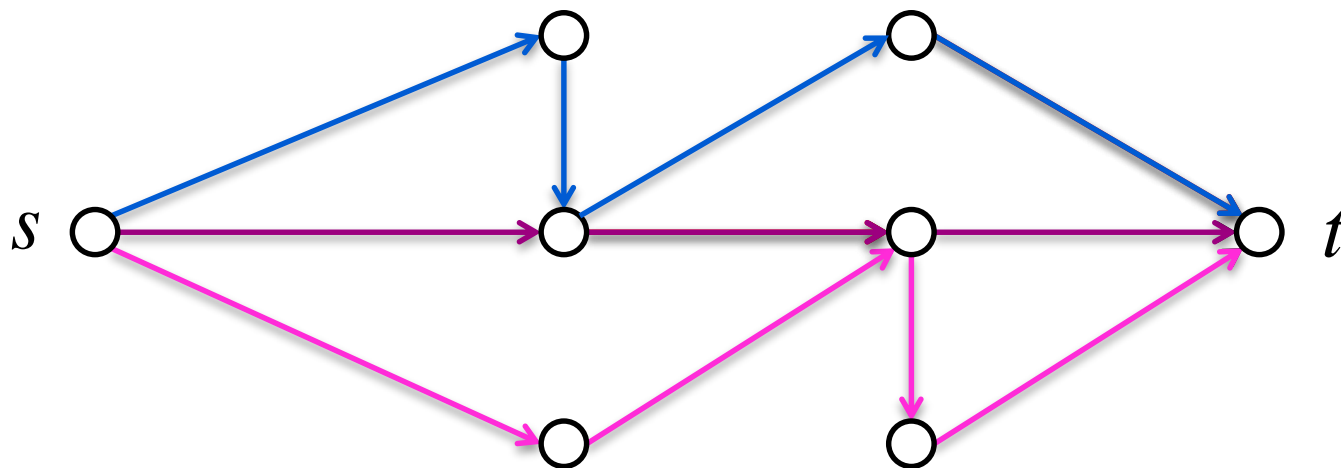
הערה

- הרעיון שהמספר המקסימאלי של מסלולים זרים זהה למספר המינימאלי של קשתות שיש להסיר נקרא משפט Menger.
- הוא התגלה ע"י קארל מנגר ב-1927.

Satz β . Ist K ein kompakter regulär eindimensionaler Raum, welcher zwischen den beiden endlichen Mengen P und Q n -punktig zusammenhängend ist, dann enthält K n paarweise fremde Bögen, von denen jeder einen Punkt von P und einen Punkt von Q verbindet.

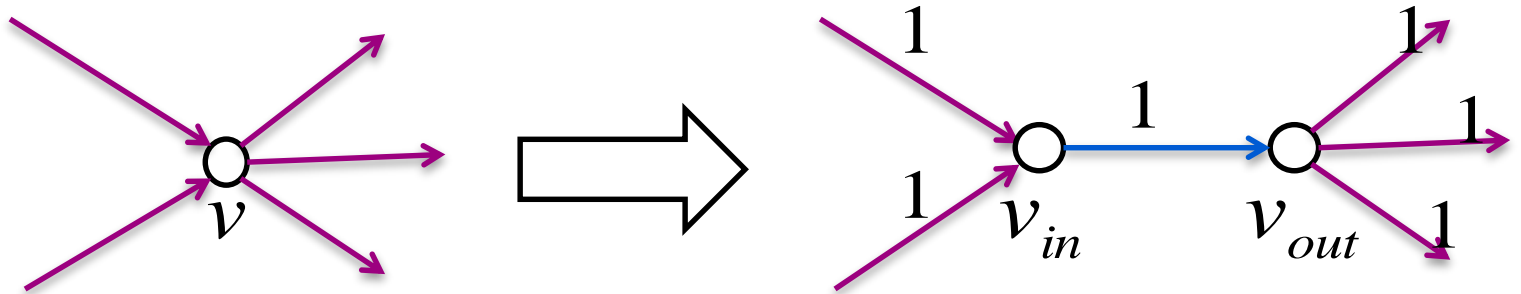
שאלה 5 – מסלולים זרים בקודקודים

- תרגיל: נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ וצמתים $s, t \in V$. תארו אלג' אשר מוצא את המספר המקסימאלי של מסלולים זרים בקודקודים מ- s ל- t .



פתרון

- כמו בשאלות הקודמות, נהפוך את הגרף לרשת זרימה על ידי הוספת קיבולים של 1.
- בנוסף, נפצל כל קודקוד (פרט ל- s ו- t) באופן הבא:



- ברשת שהתקבלה, מסלולים זרים בקשתות אמ"מ הם זרים בקוקודים.

הפתרון (המשך)

- האלגוריתם:

- נבנה את רשת הזרימה כפי שתואר בשקף הקודם.
- נמצא זרימה מקסימאלית ברשת שהתקבלה.
- זמן ריצה - $O\left(|E| \min\left\{|V|^{2/3}, |E|^{1/2}\right\}\right)$.

- נותר להוכיח:

- לכל קבוצת מסלולים זרים בקודקודים בגרף המקורי, קיימת קבוצת מסלולים זרים בקשתות ברשת החדשה (באותו הגודל), ולהיפך.

הוכחת נכונות

- כל מסלול מ- s ל- t ברשת הזרימה נראה כך:

$$s \rightarrow v_{in} \rightarrow v_{out} \rightarrow u_{in} \rightarrow \dots \rightarrow w_{in} \rightarrow w_{out} \rightarrow t$$

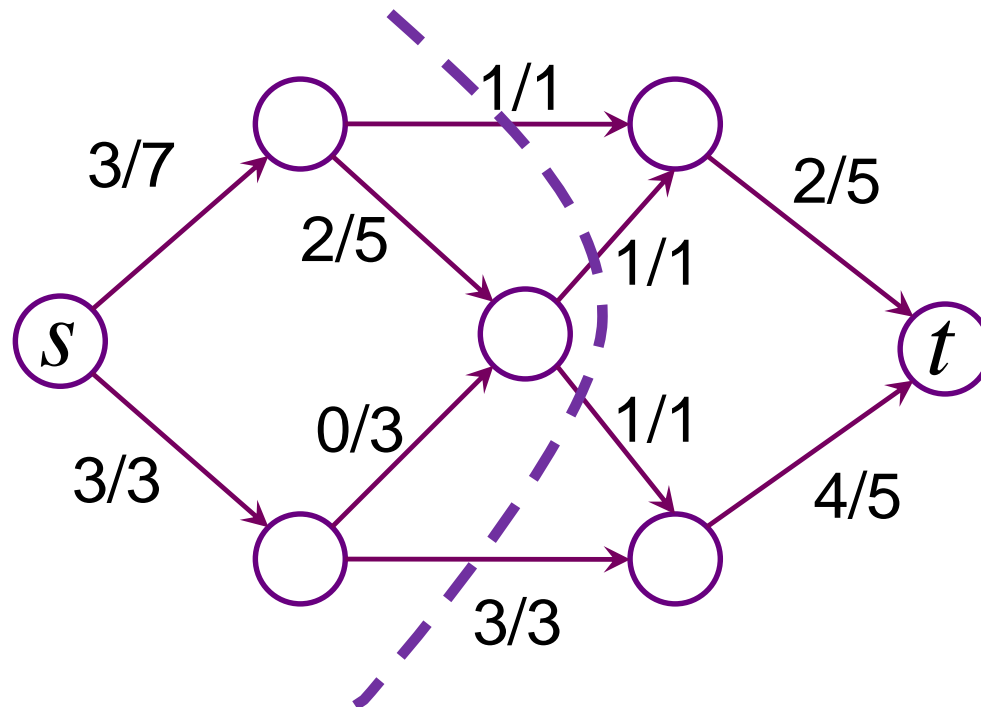
ומתאים למסלול בגרף המקורי:

$$s \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow t$$

- לכל קבוצת מסלולים זרים בקודקודים בגרף המקורי מתאימה קבוצה של מסלולים זרים בקודקודים בגרף החדש, ולכן גם זרים בקשתות.
- מסלולים זרים בקשתות ברשת החדשה בהכרח גם זרים בקודקודים, ולכן גם המסלולים המתאימים בגרף המקורי זרים בקודקודים.

שאלה 6 - מציאת חתך מינימאלי

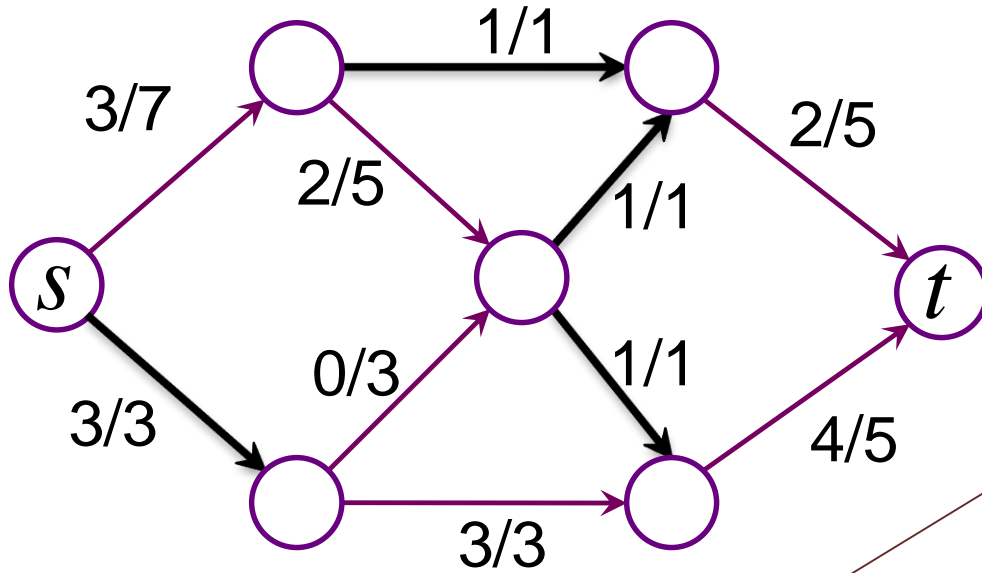
- תרגיל: נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ וזרימה מקסימאלית f . תארו אלג' למציאת חתך מינימאלי של הרשת.



שאלה 6 - פתרון

- נבנה את הרשת השיורית ביחס לזרימה f .
- נריץ BFS מהמקור ונכניס את כל הקודקודים שבעץ ה-BFS לתוך S .
- שאר הקודקודים יהיו ב- T .
- זמן ריצה – $O(|V| + |E|)$.

דוגמא



רשת זרימה

רשת שיורית

הוכחת נכונות

- נכונות: נראה שהחתך שקיבלנו מינימאלי.
 - ממשפט ה- $\max\text{-flow min-cut}$, חתך הוא מינימאלי אם"ם הוא בגודל $|f|$. נראה שגודל החתך שמצאנו, $|f| = c$.
 - כל הקשתות של החתך שמצאנו רוויות. (אם הייתה בחתך קשת שאינה רוויה, אז צריך להוסיף את הקודקוד שהיא מובילה אליו ל- S).
 - אין זרימה מ- T ל- S . אם הייתה, אז ברשת השיוורית הייתה קשת לא רוויה מ- S ל- T . לכן, כיוון שסך הזרימה בכל חתך הוא $|f|$, ויש זרימה רק בכיוון אחד של החתך, $|f| = c$.

דוגמת עזר

