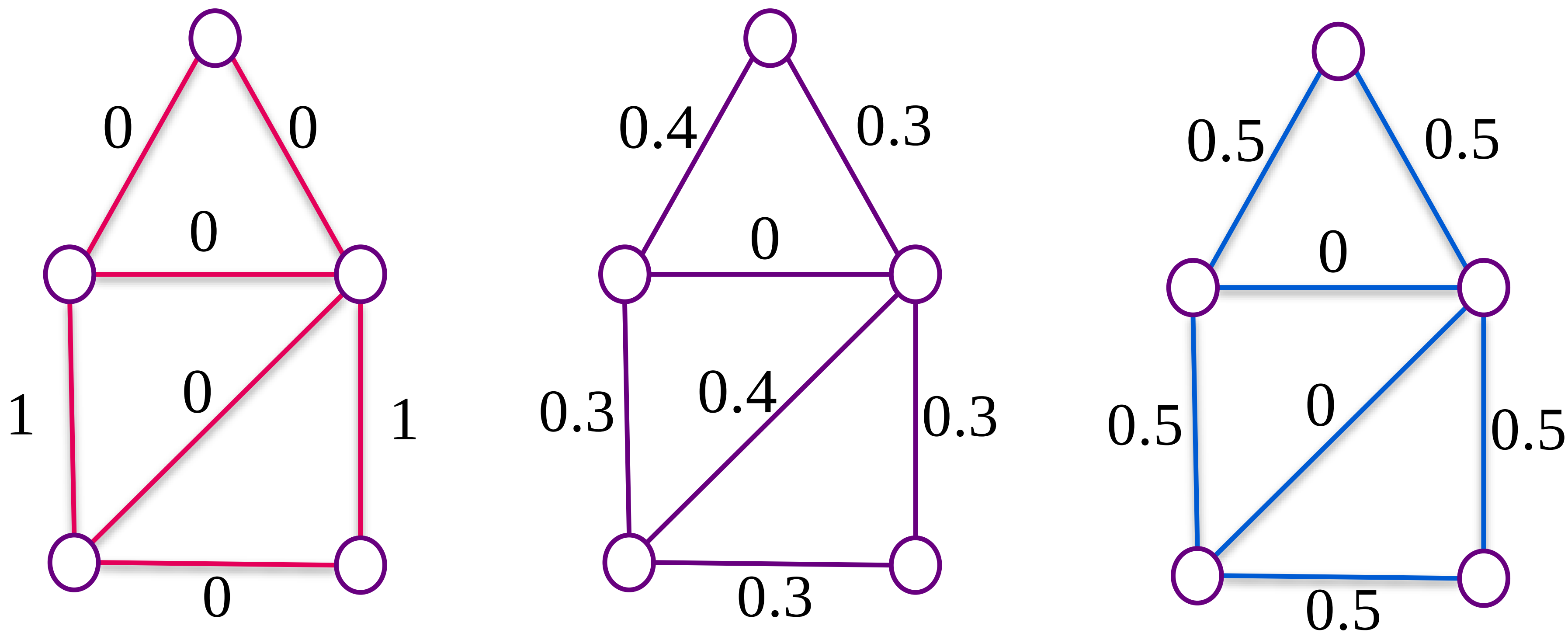
תרגול 10 – עוד תכנות ליניארי



שאלה 0

- נתונה התכנית הלינארית הבאה:

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize } x_1 + 6x_2 \\
&x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&x_1 - 3x_2 \le -9 \\
&-5x_1 + 4x_2 \le 7 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

כיתבו תכנית לינארית שמוצאת חסם עליון מינימלי על ערך פונקציית המטרה שלה.

שאלה 0 - פיתרון

- נתאים לכל אילוץ משתנה אי-שלילי, ונכפול אותו בו:

$$\text{maximize } x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 18 \quad /\cdot y_1 \qquad y_1(x_1 + 2x_2) \le 18y_1$$

$$x_1 - 3x_2 \le -9 \quad /\cdot y_2 \qquad y_2(x_1 - 3x_2) \le -9y_2$$

$$-5x_1 + 4x_2 \le 7 \quad /\cdot y_3 \qquad y_3(-5x_1 + 4x_2) \le 7y_3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

- נסכום:

$$y_1(x_1 + 2x_2) + y_2(x_1 - 3x_2) + y_3(-5x_1 + 4x_2) \le 18y_1 - 9y_2 + 7y_3$$

שאלה 0 - פיתרון

$$\text{maximize } x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 - 3x_2 \le -9$$

$$-5x_1 + 4x_2 \le 7$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

- נמצא את המקדמים של x_1,x_2:

$$(y_1 + y_2 - 5y_3)x_1 + (2y_1 - 3y_2 + 4y_3)x_2 \le 18y_1 - 9y_2 + 7y_3$$

- אם מתקיים $y_1 + y_2 - 5y_3 \ge 1$

וגם $2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \ge 6$

אז $18y_1 - 9y_2 + 7y_3$ חוסם מלמעלה את הערך של פונ' המטרה.

שאלה 0 - פיתרון

$$\text{maximize } x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1 - 3x_2 \le -9$$
$$-5x_1 + 4x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

- התוכנית המבוקשת:

ערך החסם

$$\min \overbrace{18y_1 - 9y_2 + 7y_3}$$

s.t.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - 5y_3 \ge 1 \\ 2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \ge 6 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

אילוץ שדורש
ש-y_1,y_2,y_3 אכן
נותנים חסם

- זאת בדיוק התוכנית הדואלית.

הבעיה הדואלית

- מתחילים בייצוג הסטנדרטי.
- כל אילוץ הופך למשתנה וכל משתנה הופך לאילוץ.
- מינימיזציה במקום מקסימיזציה.
- אי השוויונות משנים כיוון.
- אילוצי החיוביות נשארים, אבל בשביל המשתנים החדשים.

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \text{for} \;\; i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{for} \;\; j = 1,2,\ldots,n$$

הבעיה הדואלית

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \text{for} \;\; i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{for} \;\; j = 1,2,\ldots,n$$

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \text{for} \;\; j = 1,2,\ldots,n$$

$$y_i \ge 0 \qquad \text{for} \;\; i = 1,2,\ldots,m$$

דוגמא

$$\text{maximize } x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 18 \leftarrow \boxed{y_1}$$
$$x_1 - 3x_2 \le -9 \leftarrow \boxed{y_2}$$
$$-5x_1 + 4x_2 \le 7 \leftarrow \boxed{y_3}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{minimize } 18y_1 - 9y_2 + 7y_3$$
$$y_1 + y_2 - 5y_3 \ge 1$$
$$2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \ge 6$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

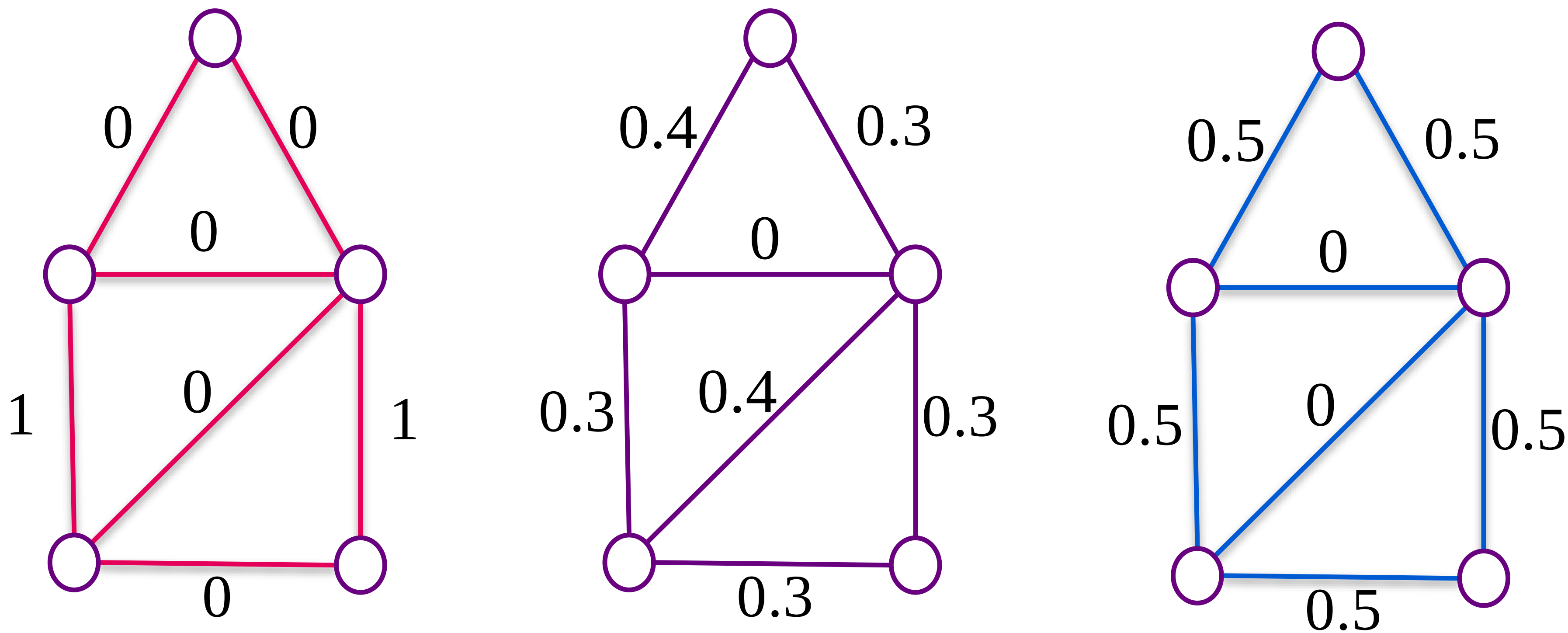
- עשינו transpose למטריצת המקדמים

שאלה 1 – זיווג שברי (fractional matching)

- **תרגיל:** מצאו תוכנית לינארית לבעיה הבאה, והסבירו מהי הבעיה המתאימה לתוכנית הדואלית לה: נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
  - אנחנו רוצים לתת משקל אי שלילי לכל קשת בגרף כך שסכום משקלי הקשתות יהיה מקסימאלי.
  - לכל קודקוד בגרף, סכום משקלי הקשתות הסמוכות אליו הינו לכל היותר 1.

- איזו בעיה התוכנית הייתה פותרת אם היינו דורשים שהמשתנים יכילו רק ערכים שלמים?

זיווג שברי - דוגמא



פתרון – התכנית הפרימאלית

- לכל קשת $e \in E$ ניצור משתנה x_e.
- לכל קודקוד $v \in V$ ניצור אילוץ.

$$\text{maximize} \quad \sum_{e \in E} x_e$$

$$\sum_{e : v \in e} x_e \le 1 \qquad \text{for } v = 1,2,\ldots,|V|$$

$$x_e \ge 0 \qquad \text{for } i = 1,2,\ldots,|E|$$

סכום על כל הקשתות אשר מכילות את הקודקוד.

פתרון – התכנית הדואלית

$$\text{maximize} \quad \sum_{e=1}^{|E|} x_e$$

$$\sum_{e:v\in e} x_e \le 1 \qquad \text{for } \; v = 1,2,\ldots,|V|$$

$$x_e \ge 0 \qquad \text{for } \; e = 1,2,\ldots,|E|$$

- משתנה לכל קשת
- אילוץ לכל קודקוד

$$\text{minimize} \quad \sum_{v=1}^{|V|} y_v$$

$$\sum_{v\in e} y_v \ge 1 \qquad \text{for } \; e = 1,2,\ldots,|E|$$

$$y_v \ge 0 \qquad \text{for } \; v = 1,2,\ldots,|V|$$

- משתנה לכל קודקוד
- אילוץ לכל קשת

פתרון – הסבר אחר לגזירת הדואלית

- אם היינו כופלים כל אי-שוויון במשתנה y_v וסוכמים, היינו מקבלים בצד שמאל של האי-שוויון הגדול:

$$\sum_{v\in V}\sum_{e:v\in e} y_v x_e = \sum_{v\in V}\sum_{e\in E} \mathbb{I}_{v\in e}\cdot y_v x_e =$$

$$= \sum_{e\in E}\sum_{v\in V} \mathbb{I}_{v\in e}\cdot y_v x_e = \sum_{e\in E}\sum_{v\in e} y_v x_e$$

$$= \sum_{e\in E} x_e \sum_{v\in e} y_v$$

- לכל e, המקדם של x_e הוא $\sum_{v\in e} y_v$.

משמעות התכנית הדואלית

$$\text{minimize} \quad \sum_{v=1}^{|V|} y_v$$

$$\sum_{v\in e} y_v \geq 1 \qquad \text{for} \;\; e = 1,2,\ldots,|E|$$

$$y_v \geq 0 \qquad \text{for} \;\; v = 1,2,\ldots,|V|$$

- מה הבעיה שהתוכנית הדואלית פותרת?
  - רוצים לתת משקל אי שלילי לכל קודקוד, כך שסכום משקלי כל הקודקודים מינימאלי.
  - עבור כל קשת, סכום משקלי הקודקודים שהיא נוגעת בהם נדרש להיות לפחות 1.

משמעות התכנית הדואלית בשלמים

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{|V|} y_j$$

$$\sum_{v \in e_i} y_v \geq 1 \qquad \text{for } \; i = 1,2,\ldots,|E|$$

$$y_v \geq 0 \qquad \text{for } \; v = 1,2,\ldots,|V|$$

- איזו בעיה התוכנית הייתה פותרת אם היינו דורשים שהמשתנים יכילו רק ערכים שלמים?

- כל קודקוד מקבל 0 או 1 (למה לא יותר מ-1?).
- לכן כל קודקוד נבחר או לא נבחר.
- מחפשים קבוצה בגודל מינימאלי של קודקודים.
- מה האילוץ? לפחות קודקוד אחד יגע בכל קשת.
- זאת בעיית Vertex Cover – מציאת קבוצה מינימאלית של קודקודים כך שכל קשת נוגעת בלפחות קודקוד אחד מהקבוצה.

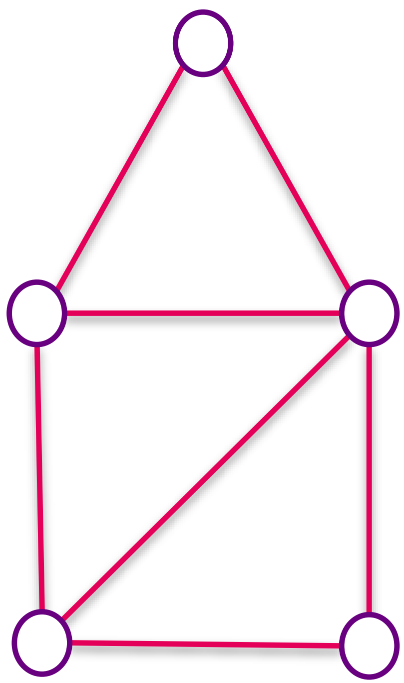
משמעות התכנית הדואלית בשלמים

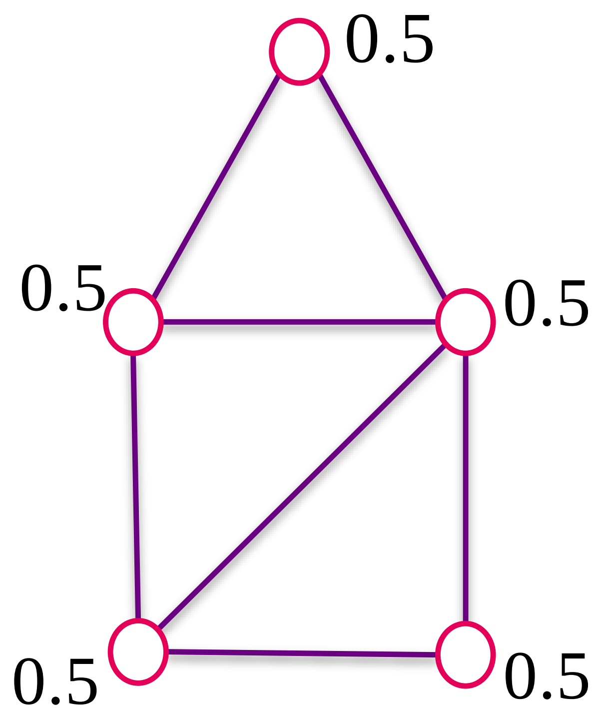
$$\text{minimize} \quad \sum_{v=1}^{|V|} y_v$$

$$\sum_{v\in e} y_v \geq 1 \qquad \text{for } e = 1,2,\ldots,|E|$$

$$y_v \geq 0 \qquad \text{for } v = 1,2,\ldots,|V|$$

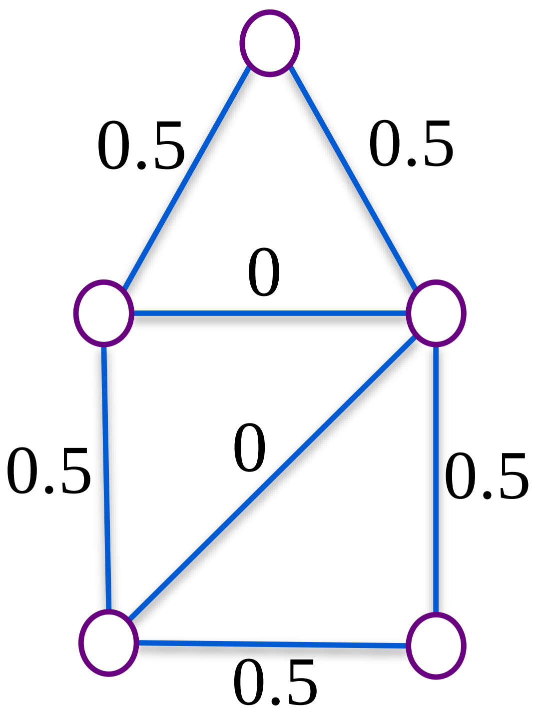
- Vertex Cover – מציאת קבוצה מינימאלית של קודקודים כך שכל קשת נוגעת בלפחות קודקוד אחד מהקבוצה.

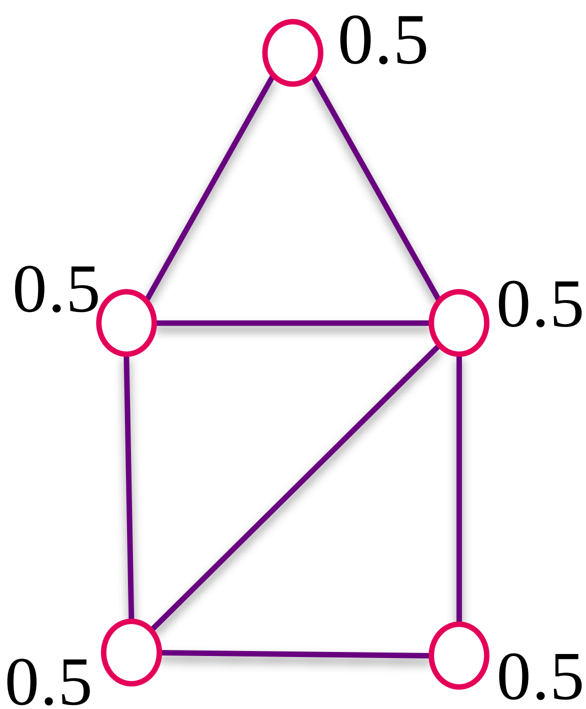




משפט הדואליות

- **משפט.** אם לבעיית תכנות לינארי קיים פתרון פיזיבילי אופטימאלי, אז ערך הפתרון האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית יהיה זהה לערך הפתרון האופטימאלי של הבעיה הדואלית.





שאלה 2 – פיזיביליות לינארית

פיזיביליות לינארית (LF) - נתונים m אי-שיוויונים לינאריים ב- n משתנים. עלינו למצוא הצבה של ערכים למשתנים אשר תספק את כל האילוצים.

1) נתון אלג' לפתרון בעיות LP. הסבירו כיצד ניתן להשתמש בו על מנת לפתור בעיית LF.
2) נתון אלג' לפתרון בעיות LF. הסבירו כיצד ניתן להשתמש בו על מנת לפתור בעיית LP. ניתן להניח שקיים לבעיה פתרון אופטימלי.

פתרון סעיף 1

1) נתון אלגוריתם לפתרון בעיות LP. הסבירו כיצד ניתן להשתמש בו על מנת לפתור בעיית LF.

פתרון: נוסיף לבעיה פונקציית מטרה כלשהי, ונקבל בעיית תכנות ליניארי.

למשל, Minimize 0.

את הבעיה שהתקבלה ניתן לפתור בעזרת האלגוריתם הנתון.

פתרון סעיף 2

2) נתון אלגוריתם לפתרון בעיות LF. הסבירו כיצד ניתן להשתמש בו על מנת לפתור בעיית LP.

פתרון: נשתמש גם באילוצים של התוכנית הפרימאלית וגם באילוצים של התוכנית הדואלית (כל אחת עם סט משתנים משלה).

- נוסיף אילוץ $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

כלומר, אנו דורשים שהפתרון הפרימאלי יהיה שווה לפתרון הדואלי. זה יתקיים רק עבור הפתרונות האופטימליים.

שאלה 4 – צעצועים לחתולים

עמוד

גליל

שאלה 4 – צעצועים לחתולים

יש לנו מפעל לצעצועי חיות.
אנחנו מוכרים גליל ב 45 ₪ ועמוד ב-35 ₪ .
יש לנו 1000 מ"ר של בד, וצריך 10 מ"ר לייצר גליל ו-3 מ"ר לעמוד.
יש לנו 250 פרחים, וצריכים 2 פרחים לעמוד ופרח אחד לגליל.
יש לנו 500 מטר חבל, וצריך 7 מטר חבל לעמוד.
נרצה למקסם את הרווח.

שאלה 4 – צעצועים לחתולים

$$\text{maximize } 45x_1 + 35x_2$$ רווח

$$10x_1 + 3x_2 \le 1000$$ בד

$$x_1 + 2x_2 \le 250$$ פרחים

$$7x_2 \le 500$$ חבל

גלילים ופרחים

$$x_1, x_2 \ge 0$$

אנחנו מוכרים גליל ב 45 ₪ ועמוד ב-35 ₪ .
יש לנו 1000 מ"ר של בד, וצריך 10 מ"ר לגליל ו-3 מ"ר לעמוד.
יש לנו 250 פרחים וצריכים 2 פרחים לעמוד ופרח אחד לגליל.
יש לנו 500 מטר חבל, וצריך 7 מטר חבל לעמוד.
נרצה למקסם את הרווח.

שאלה 4 – הבעיה הדואלית

$$\text{maximize } 45x_1 + 35x_2$$

$$10x_1 + 3x_2 \le 1000$$

$$x_1 + 2x_2 \le 250$$

$$7x_2 \le 500$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{minimize } 1000\text{y}_1 + 250y_2 + 500y_3$$

$$10y_1 + y_2 \ge 45$$

$$3y_1 + 2y_2 + 7y_3 \ge 35$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

שאלה 4 – הבעיה הדואלית

חידה: נניח שמפעל מתחרה רוצה לקנות מאיתנו את חומרי הגלם. כמה הוא יצטרך לשלם כדי שנסכים למכור?

$$\text{minimize } 1000y_1 + 250y_2 + 500y_3$$

$$10y_1 + y_2 \geq 45$$

$$3y_1 + 2y_2 + 7y_3 \geq 35$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

כמה הוא משלם

תשלום על 10 מ"ר בד + פרח צריך להיות יותר מ-45 ₪

תשלום על 3 מ"ר בד + 2 פרחים +7 מטר חבל צריך להיות יותר מ-35 ₪

יחידה אחת מהמשאב

שאלה 4 – הפרימאלית והדואלית

$$\text{maximize } 45x_1 + 35x_2$$

מחיר כפול כמות

$$10x_1 + 3x_2 \le 1000$$

$$x_1 + 2x_2 \le 250$$

כמות

$$7x_2 \le 500$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

כמות כפול מחיר

$$\text{minimize } 1000\text{y}_1 + 250y_2 + 500y_3$$

$$10y_1 + y_2 \ge 45$$

מחיר ליחידה

מחיר

$$3y_1 + 2y_2 + 7y_3 \ge 35$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

שאלה 4 – שיוויון הפתרונות

- מתי נסכים למכור?
- אם ישלמו את הרווח המקסימאלי שלנו ומעלה, ישתלם לנו למכור.