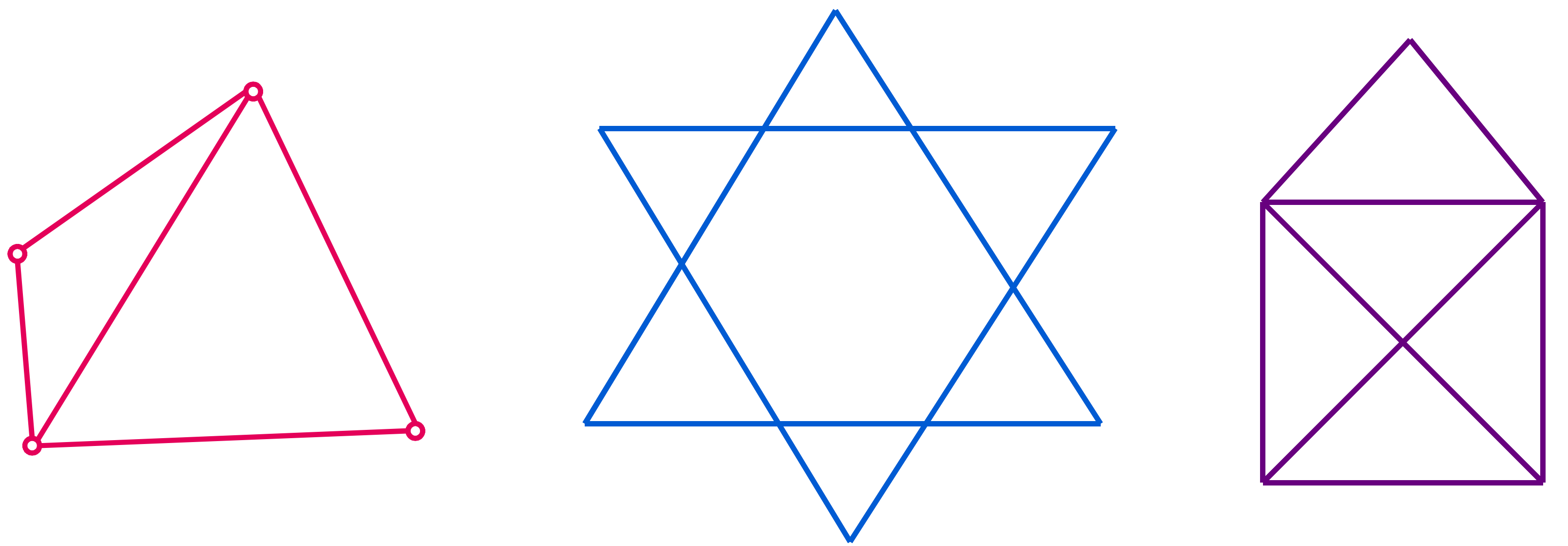
תרגול 1 - מעגלי אוילר ומסלולי אוילר

חידה:

האם אפשר לצייר את הציורים הבאים בלי להרים את העיפרון מהנייר?



קצת אדמיניסטרציה

- אופיר פרידלר– ophir.friedler@gmail.com
- אלון עדן - alonarden@gmail.com

- שעות קבלה בתיאום מראש,

  שרייבר, קומה 1-, חדר 18מ

- אתר + פורום

  http://tau-algorithms.wikidot.com/

קצת על שיעורי הבית

הציון הסופי יהיה מורכב מ- 90% בחינה ו- 10% שיעורי בית.

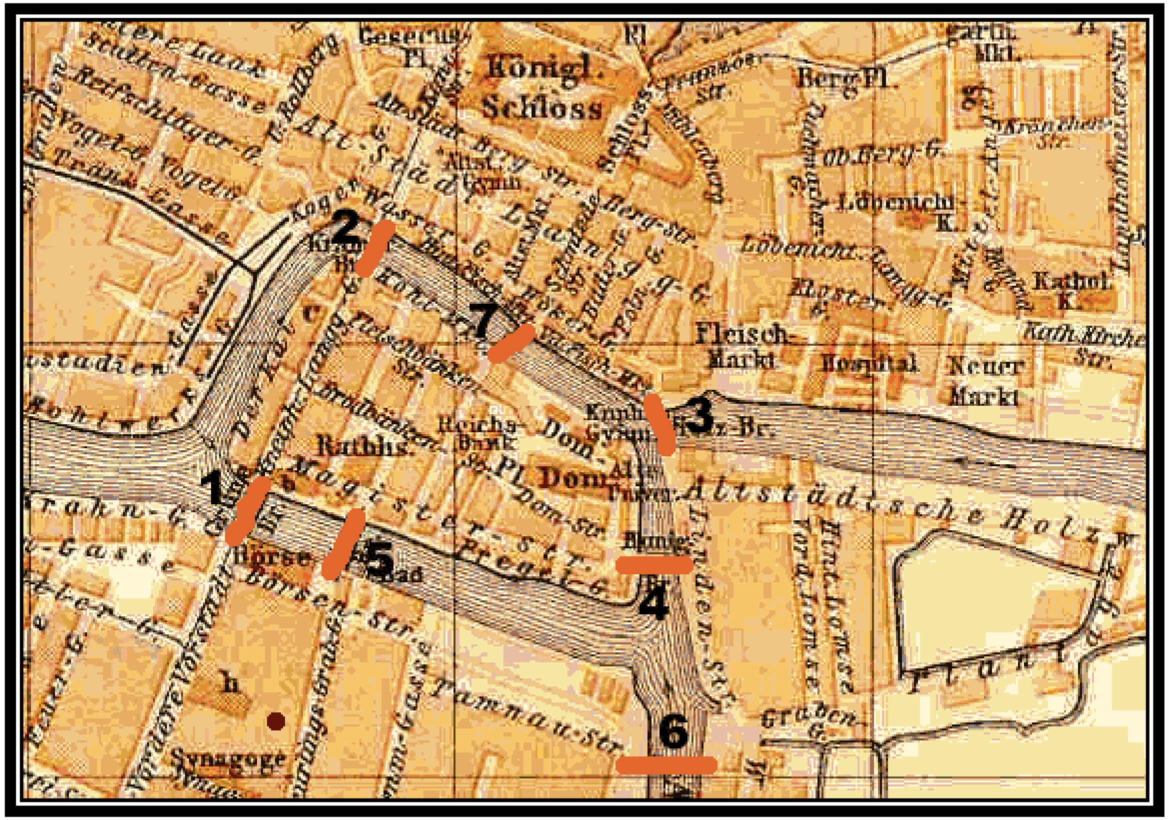
בשיעורי הבית יהיו 6 תרגילים. כל תרגיל יורכב מ-8 שאלות – הציון לכל תרגיל יהיה על סמך 7 התשובות הטובות ביותר.

ניתנת הארכה אוטומטית של 4 ימים למי שרוצה. אין צורך לבקש.
תינתן הארכה נוספת רק עבור שירות מילואים או מחלה ארוכים מ-4 ימים. אורך ההארכה הנוספת יהיה הפרש הימים, ותינתן על סמך אישורים מתאימים.

לשיעורי בית שיוגשו באיחור יורדו 5% על כל יום איחור. אין חובת הגשה.

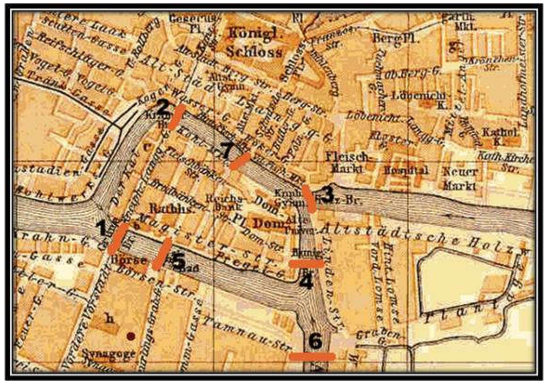
נא לשמור עותק של הש״ב למקרה שנאבד

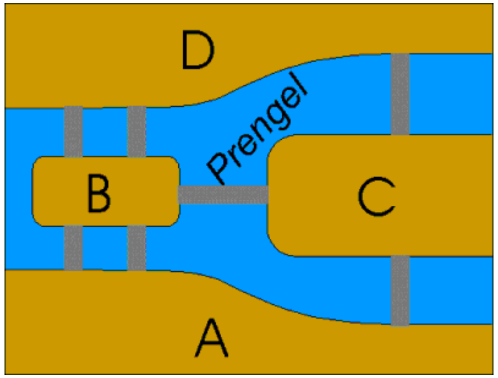
הגשרים של קניגסברג

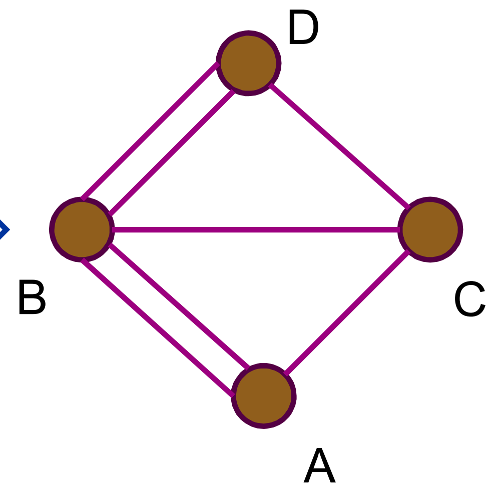


- האם נוכל לטייל בעיר כך שנחצה כל גשר בדיוק פעם אחת?

לידת תורת הגרפים



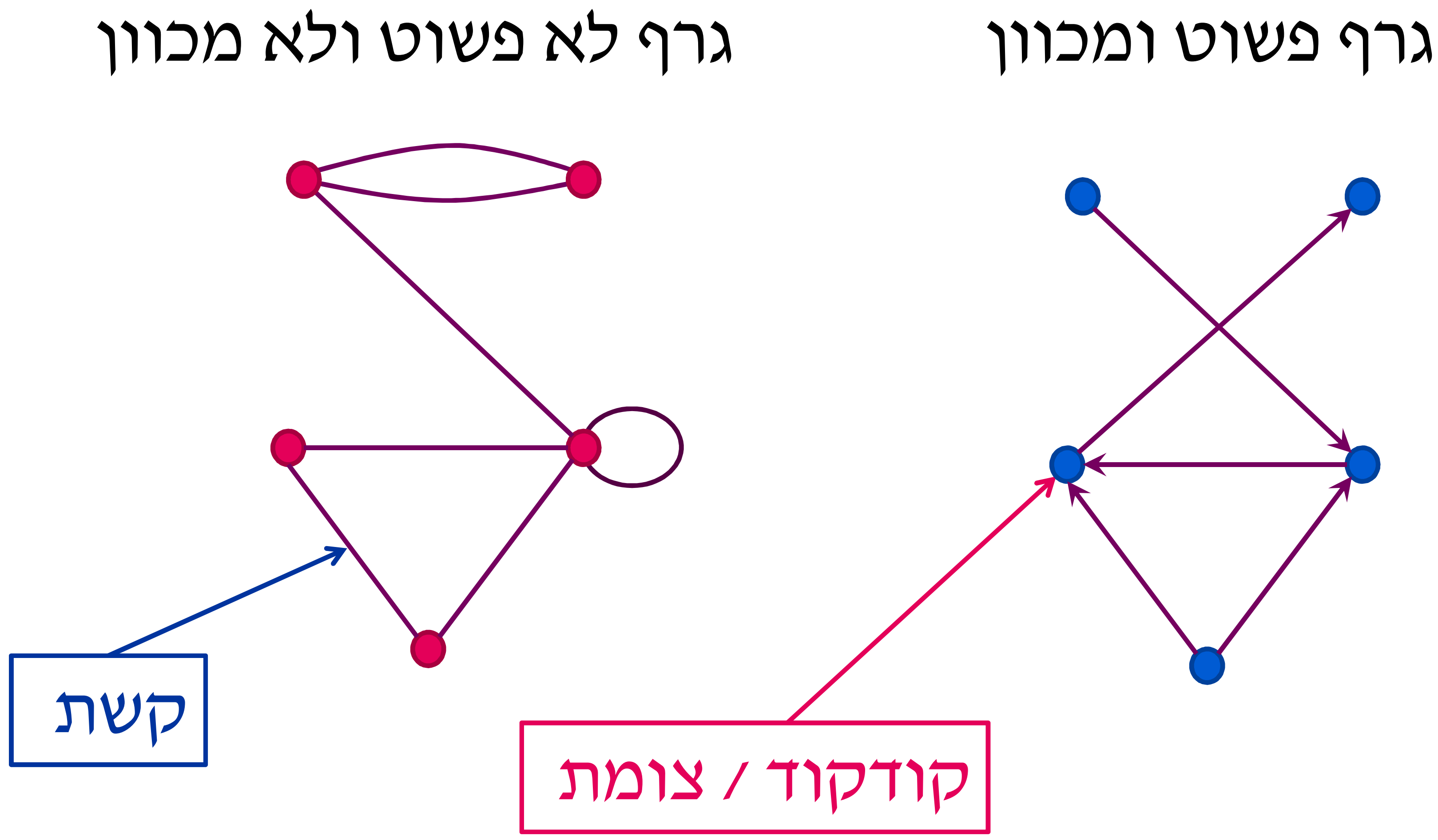




גרפים מיוצגים ע״י: $G = (V, E)$

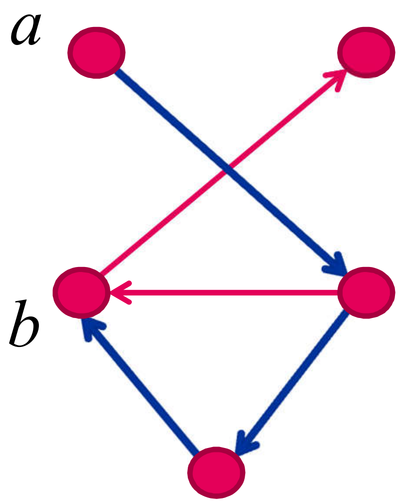
לאונרד אוילר
1707-1783

תזכורת - גרפים

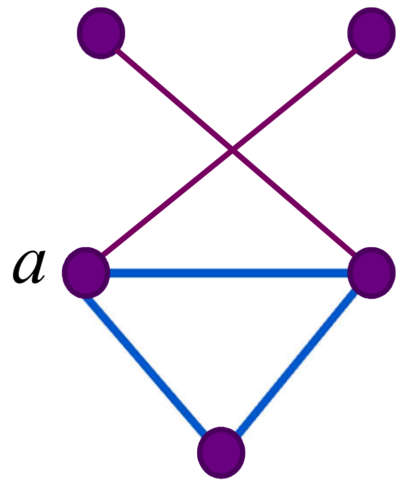


תזכורת – גרפים (המשך)

מסלול מ- a ל- b.



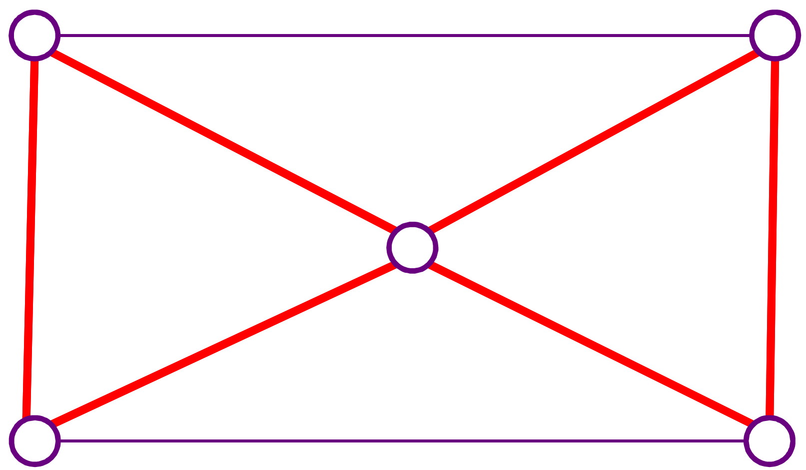
מעגל שעובר דרך a.



מעגל הוא מסלול שמתחיל ומסתיים באותה נקודה.

תזכורת – גרפים (המשך)

- מסלול פשוט הוא מסלול שעובר דרך כל קודקוד פעם אחת לכל היותר.
- מעגל פשוט הוא מסלול פשוט שמתחיל ומסתיים באותו קודקוד.

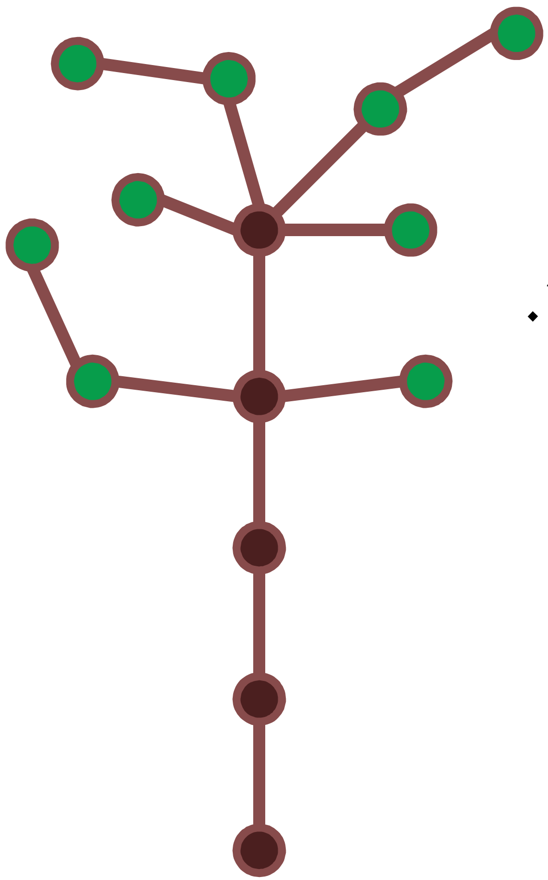


מעגל לא פשוט

תזכורת – גרפים (המשך)

- **גרף קשיר** – גרף לא מכוון בו קיים מסלול בין כל זוג קודקודים.
- **דרגה** של קודקוד v הינה מספר הקשתות המחוברות אליו. נסמן אותה ע"י $\deg(v)$.
- בגרף מכוון, לכל קודקוד יש **דרגת כניסה** ו- **דרגת יציאה**.

תזכורת – גרפים (המשך)



- גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נקרא **עץ** אם:
  - קיים מסלול יחיד בין כל זוג קודקודים.
  - G קשיר ו- $|E|=|V|-1$.
  - G חסר מעגלים וקשיר.
  - G חסר מעגלים ו- $|E|=|V|-1$.

תמצית הקורס

הקורס מתמקד באלגוריתמים יעילים לפתרון בעיות.

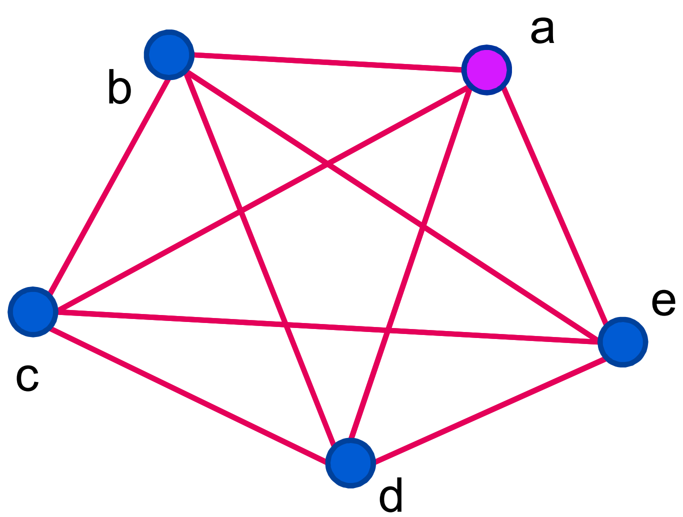
לרוב, תיאור האלגוריתם מתחלק לשלושה שלבים:

- הצגת האלגוריתם
- הוכחת נכונות
- הוכחת סיבוכיות

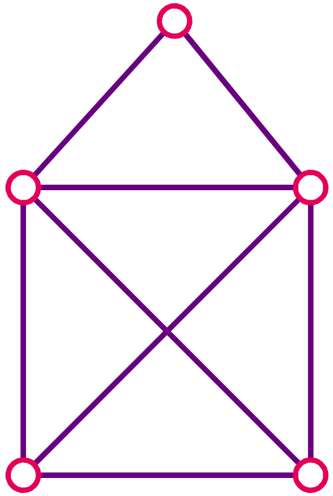
לעיתים, נשתמש באלגוריתמים להוכיח משפטים, ולא בשביל לפתור בעיה.

מסלול אוילר ומעגל אוילר

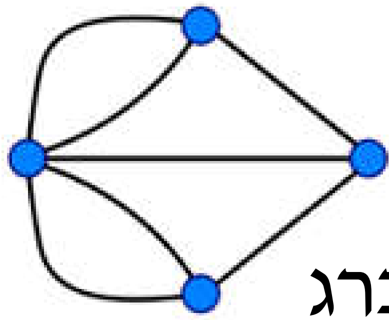
- עבור גרף $G=(V,E)$, ***מסלול אוילר*** הינו מסלול בגרף אשר עובר על כל קשת בדיוק פעם אחת.
- ***מעגל אוילר*** הינו מסלול אוילר שמתחיל ומסתיים באותו קודקוד.



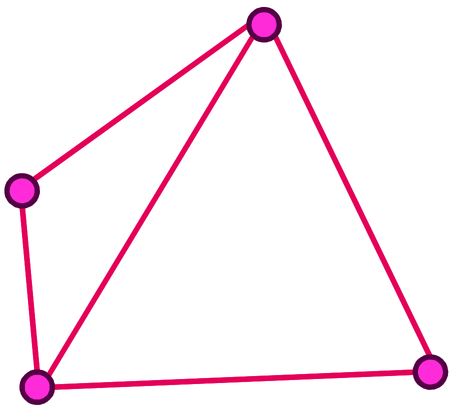
האם קיים מעגל אוילר?



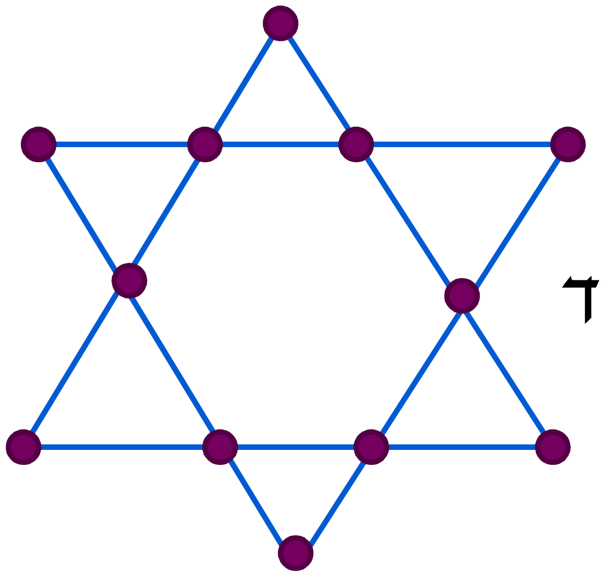
בית



קניגסברג



פירמידה

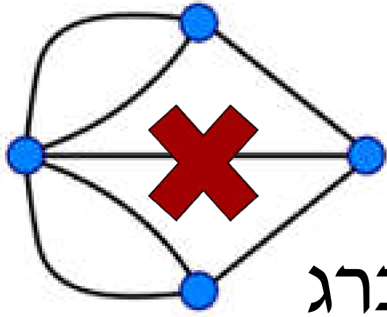


מגן דוד

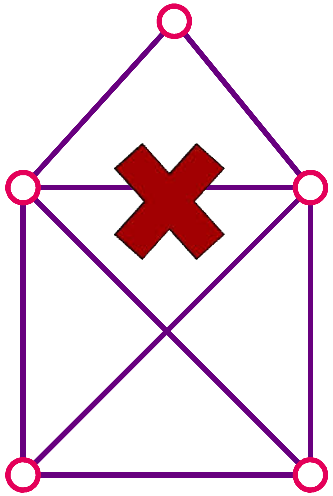
איך יודעים אם קיים מעגל אוילר?

טענה: גרף (לאו דווקא פשוט) קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ מכיל מעגל אוילר אס״ם לכל קודקוד $u\in V$ יש דרגה זוגית.

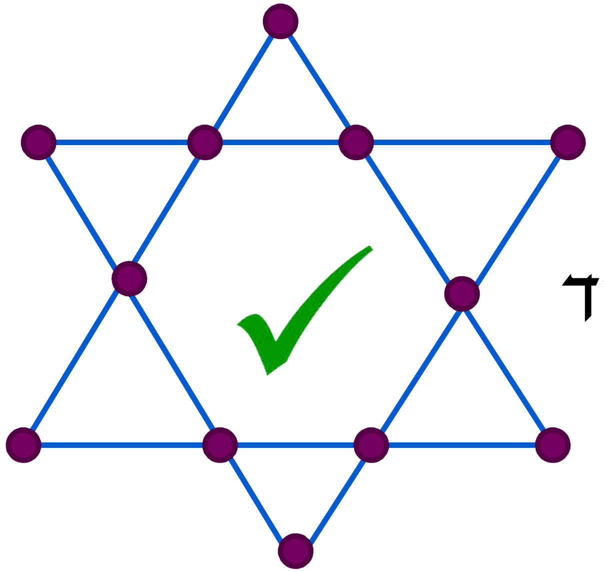
האם קיים מעגל אוילר?



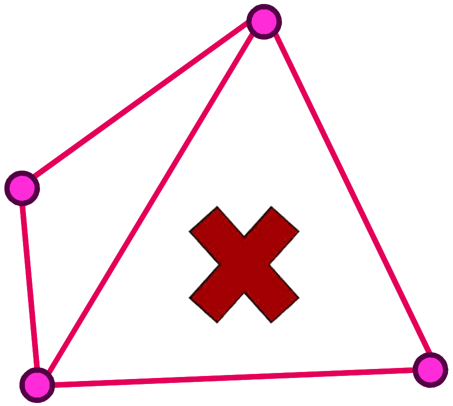
קניגסברג



בית



מגן דוד



פירמידה

הוכחת הטענה – כיוון ראשון

- נניח שקיים מעגל אוילר ונראה שכל הדרגות בגרף זוגיות:

  נבחר מעגל אוילר כלשהו ונטייל לאורכו החל מקודקוד כלשהו v.

  לכל קודקוד $u \in V$, נסמן את מספר הפעמים שעברנו בו בטיול כ- k_u.

  לכל קודקוד $w \in V \setminus \{v\}$, בכל ביקור בו - אנו נכנסים אליו דרך קשת אחת ויוצאים דרך אחרת. כלומר, $d(w) = 2k_w$.

  באופן דומה, $d(v) = 2k_v - 2$.

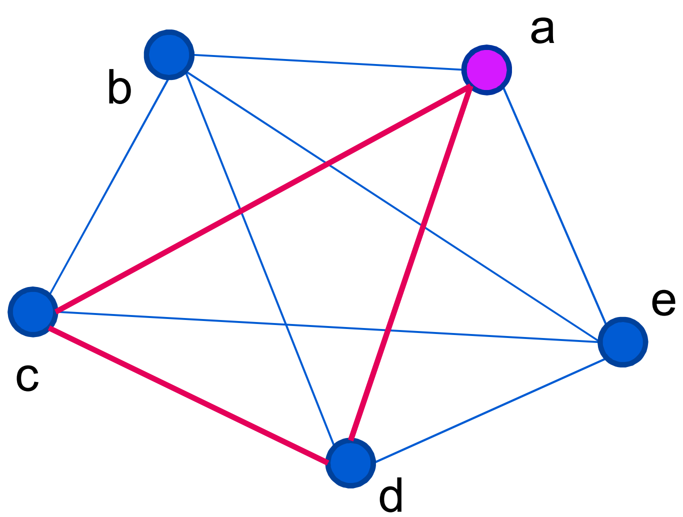
הוכחת הטענה – כיוון שני

- נניח שכל הדרגות זוגיות ונראה שקיים מעגל אוילר:

נתאר אלג' שתמיד מוצא מעגל אוילר בגרף מסוג זה.
הטענה נובעת מנכונות האלג'.

האלג' – חלק ראשון

- נבחר קודקוד כלשהו v ונתחיל ממנו טיול על הגרף. בכל שלב, נבחר קשת שעדיין לא עברנו עליה, נחצה אותה, ונזרוק אותה מהגרף. נמשיך כך עד שנחזור ל- v.



$$a \to c \to d \to a$$

•

נכונות השלב הראשון

- **טענה:** כל עוד לא חזרנו ל- v, תמיד נוכל להמשיך את הטיול.
- **הוכחה:** נבחר קודקוד כלשהו u ונראה שלא ייתכן שנתקע ב- u ללא אפשרות להמשיך:

לפני כל ביקור ב-u, הדרגה שלו זוגית.

$\Downarrow$

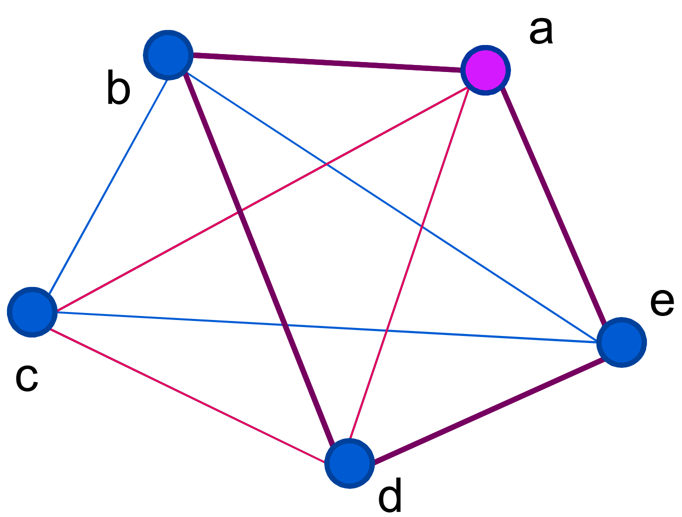
בכל פעם שנבקר ב- u, הדרגה שלו תהיה אי זוגית.

$\Downarrow$

לא ייתכן שנבקר ב- u ותהיה לו דרגה 0.

האלג' – חלק שני

- אם המעגל שמצאנו מכיל את כל הקשתות – סיימנו.
- אחרת, לפחות לאחד מהקודקודים שעברנו בהם עדיין יש דרגה חיובית (כיוון שהגרף קשיר).
- נבחר קודקוד כזה ונתחיל ממנו טיול נוסף. שוב, הטיול יסתיים כאשר נחזור לנקודת ההתחלה.



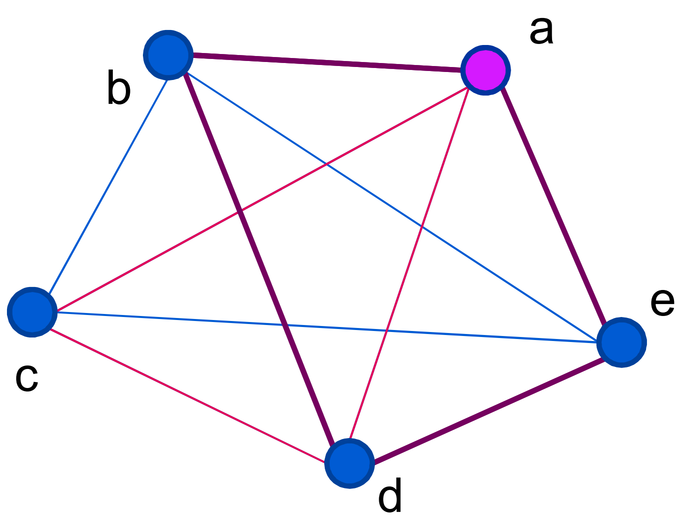
$$d \to e \to a \to b \to d$$

האלג' – חלק שני (המשך)

- קיבלנו שני מעגלים זרים בקשתות. בנוסף, הקודקוד ה"ראשון" של המעגל השני מופיע גם במעגל הראשון. נאחד אותם למעגל יחיד באופן הבא:

$$a \to c \to d \to a$$

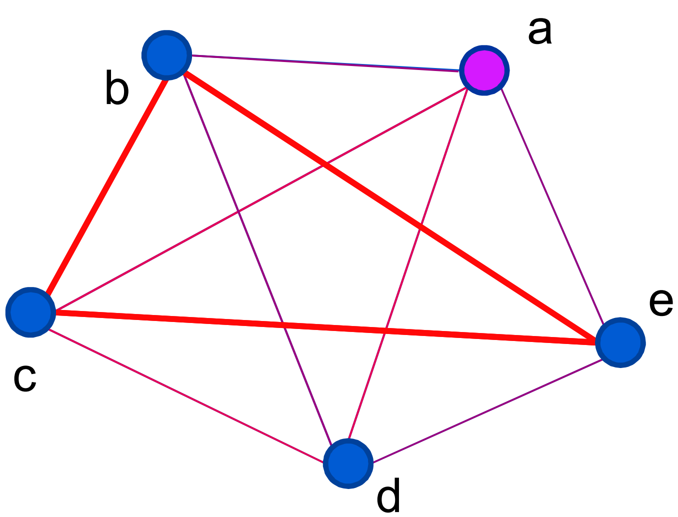
$$\overbrace{d \to e \to a \to b \to d}$$



$$a \to c \to d \to e \to a \to b \to d \to a$$

האלג' – חלק אחרון

- נחזור על השלב השני עד שהמעגל יכיל את כל הקשתות.



$$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$$

$$+$$

$$e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e$$

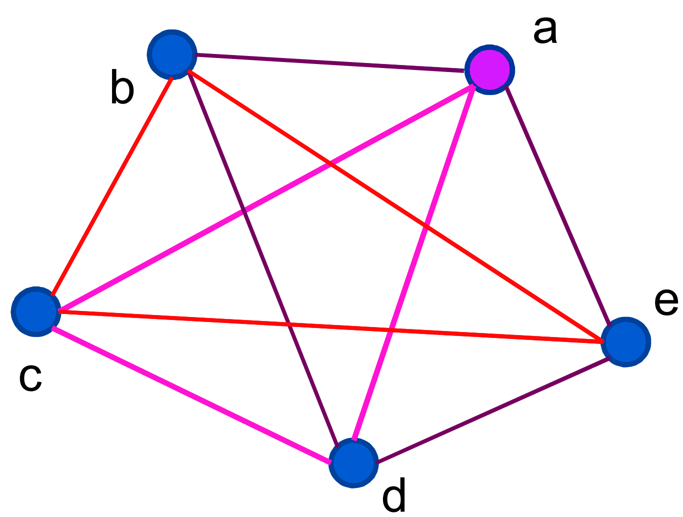
$$=$$

$$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$$

האלג' – חלק אחרון

המעגל שהתקבל:

$$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$$



נכונות האלג'

- לא ייתכן שהאלג' יתקע באמצע טיול על הגרף (נובע מההוכחה שראינו עבור השלב הראשון).
- בתחילת כל שלב, אם נותרו קשתות בגרף – קיים במעגל הנוכחי קודקוד עם דרגה חיובית (כיוון ש-G קשיר).
- בסוף כל שלב נקבל מעגל עם מספר גדול יותר של קשתות. האלג' נמשך כל עוד יש קשתות שלא נמצאות במעגל, ולכן תמיד יתקבל לבסוף מעגל אוילר.

זמן ריצה

- נגדיר מספר פרטי מימוש:

הגרף ייוצג על ידי רשימות שכנויות.

ה

כא

ה ... חקים

מבחינת ההוכחה אין משמעות לסיבוכיות כי אנחנו משתמשים בנכונות האלגוריתם בלבד להוכיח את המשפט.

כל קשת לאחר שעברנו עליה, סך זמן הפעולות על הקשתות הינו $O(|E|)$.

נחזיק מצביע לקודקוד הראשוןבמעגל שדרגתו עדיין חיובית.

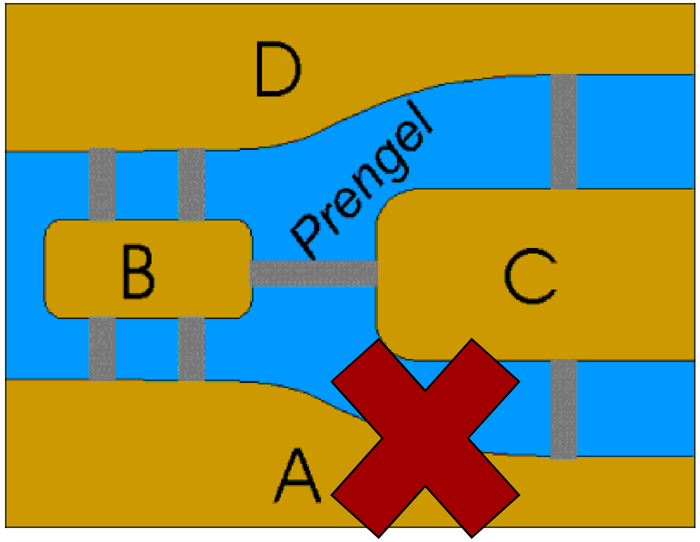
סך עדכוני המצביע - $O(|E|)$.

- סה"כ זמן ריצה – $O(|E|)$.

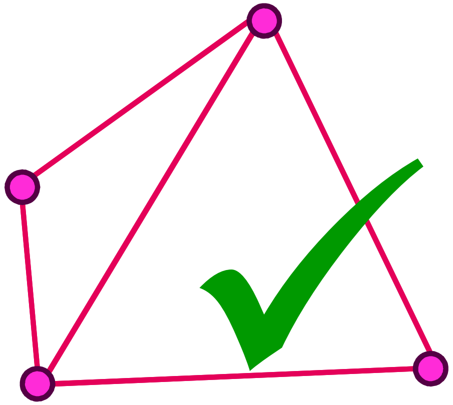
מסלול אוילר

- **טענה:** גרף קשיר ולא מכוון מכיל מסלול אוילר (שאינו מעגל) אמ״מ הוא מכיל בדיוק שני קודקודים מדרגה אי זוגית.
- **תזכורת:** בניגוד למעגל אוילר, מסלול אוילר לאו דווקא מסתיים בקודקוד שבו התחיל.

מסלול אוילר - דוגמאות

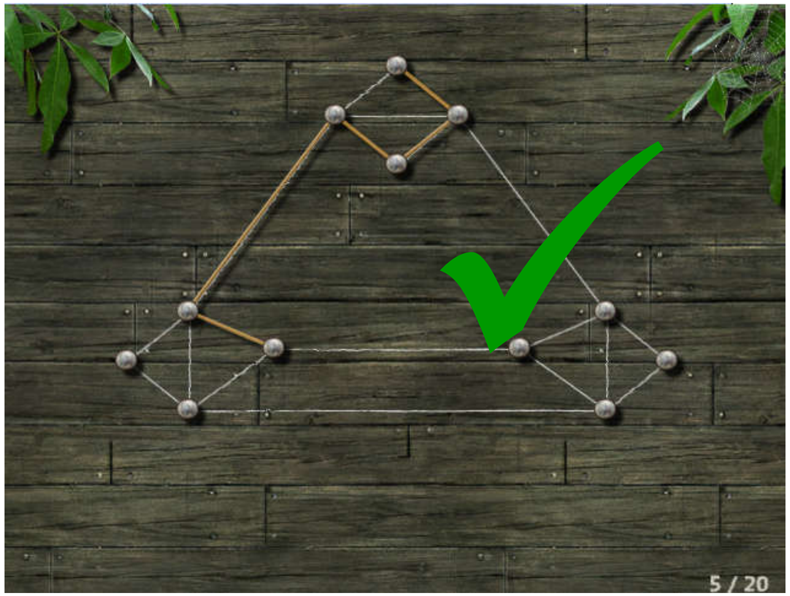


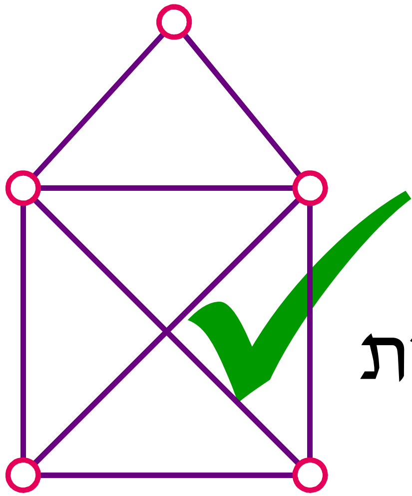
קניגסברג



פירמידה

Icosen





בית

•

הוכחת הטענה – כיוון ראשון

- נניח שקיים מסלול אוילר (שאינו מעגל) ונראה שבדיוק לשני קודקודים יש דרגה אי זוגית:

  בדומה להוכחה הקודמת, נטייל לאורך המסלול.
  לקודקוד u (שאינו הראשון או האחרון במסלול) שעברנו דרכו k_u פעמים יש דרגה $2k_u$.

  לקודקוד v, אשר הינו הראשון או האחרון במסלול, יש דרגה $2k_v - 1$.

•

הוכחת הטענה – כיוון שני

- נניח שבדיוק לשני קודקודים יש דרגה אי-זוגית ונראה שקיים מסלול אוילר:

נוסיף קשת בין שני הקודקודים בעלי הדרגה האי-זוגית.

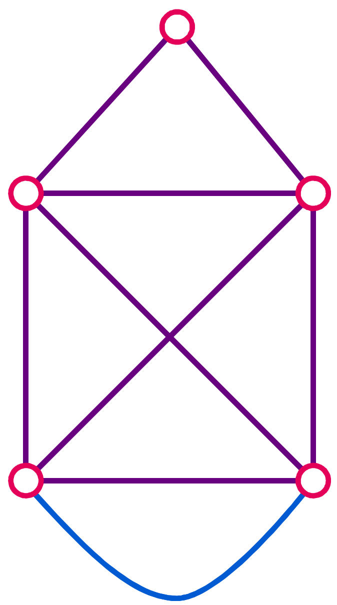
קיבלנו גרף שכל הדרגות בו זוגיות, ולכן

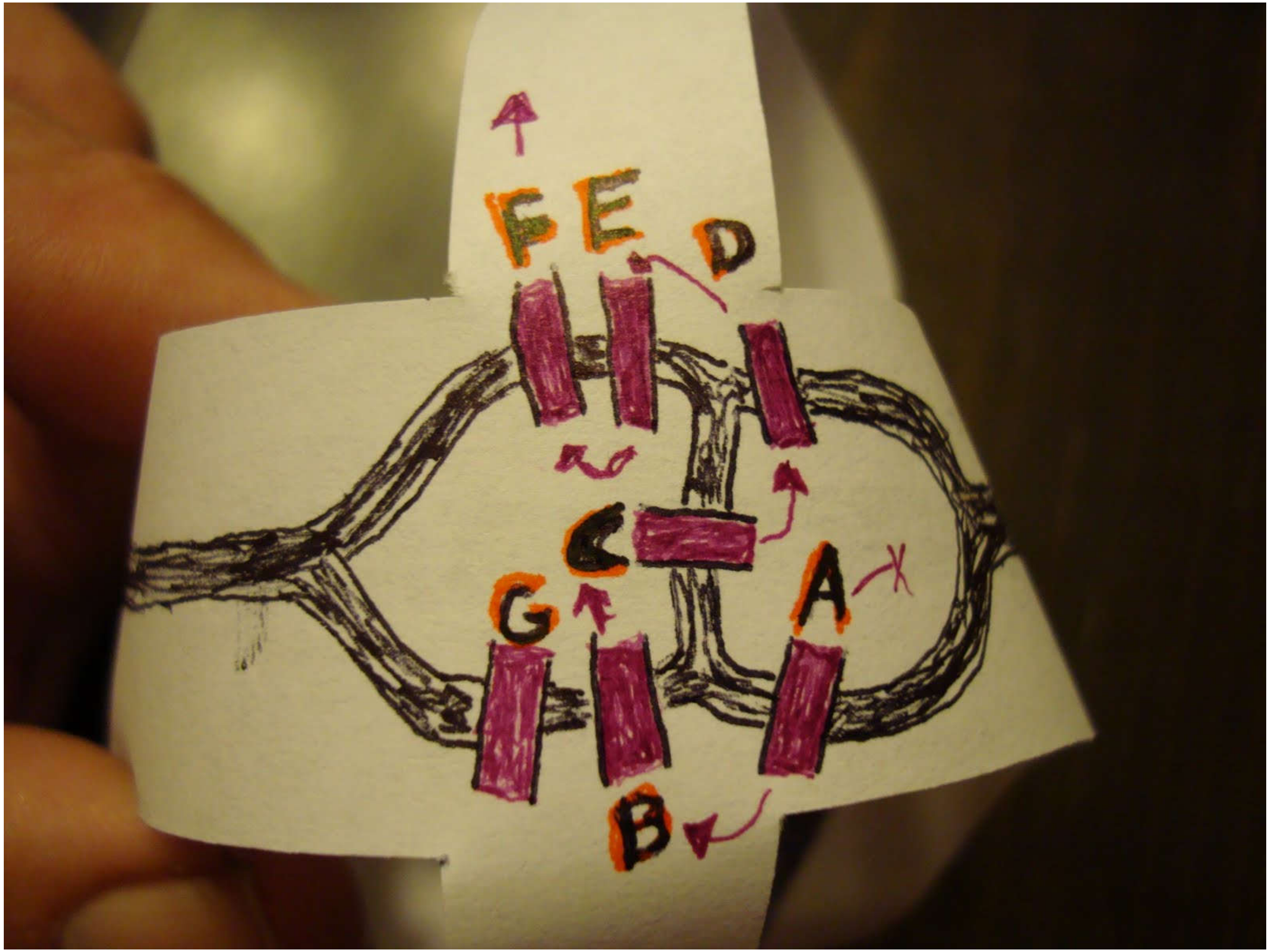
הוא מכיל מעגל אוילר.

נסיר מהמעגל את הקשת שהוספנו לגרף

ונקבל מסלול אוילר עבור הגרף המקורי.

(איך?)




F
E
D
C
G
A
B