

תרגול 12 – תכנות לינארי

תכנות לינארי – מה יש לנו?

- n משתנים x_1, x_2, \dots, x_n .
- m אי-שוויונים לינאריים. למשל,

$$x_1 + x_2 + 4x_n \leq 6$$

$$x_{12} + 4x_4 - 2x_{17} + x_1 = 22$$

...

$$2x_4 + x_n - 12x_2 \geq -20$$

- פונקציית מטרה לינארית. למשל,

$$\text{minimize } 3x_1 + 5x_2 - 17x_8 + \dots - x_n / 12$$

תכנות לינארי – מטרה

- פתרון פיזיבילי הינו הצבת ערכים ל- x_1, x_2, \dots, x_n כך שכל m האי-שוויונים מתקיימים.
- אנו מעוניינים באלגוריתם שימצא את הפתרון הפיזיבילי אשר מביא לערך מקסימאלי / מינימאלי של פונקצית המטרה.

תוצאות אפשריות

קיים פתרון אופטימאלי

$$\begin{aligned} &\text{maximize } 2x \\ &x \leq 5 \end{aligned}$$

הבעיה אינה חסומה (נוכל לקבל פתרון גדול כרצוננו)

$$\begin{aligned} &\text{maximize } 2x \\ &x \geq 6 \end{aligned}$$

לא קיים פתרון

$$\begin{aligned} &\text{maximize } 2x \\ &x \leq 5 \\ &x \geq 6 \end{aligned}$$

הצגה גראפית

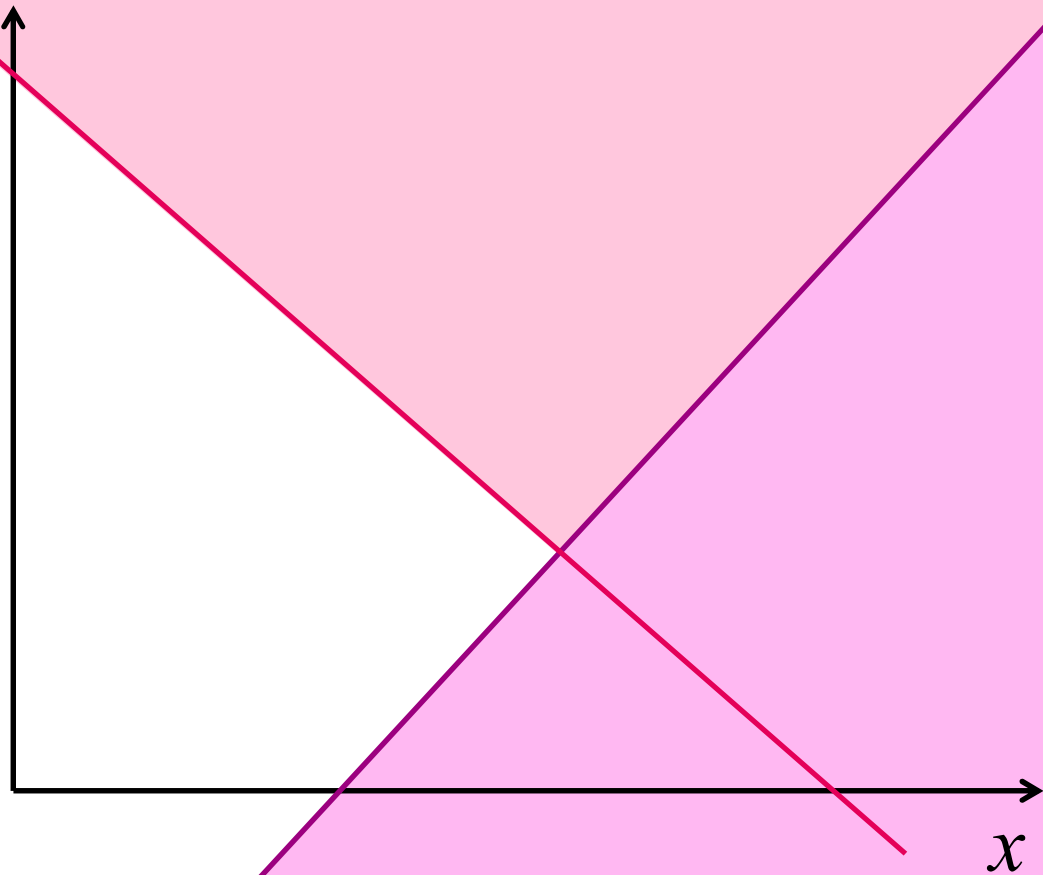
$$x + y \leq 8$$

$$x - y \leq 4$$

maximize x

$$x - y \leq 4$$

$$x + y \leq 8$$



אלגוריתם הסימפלקס

הדגמה גראפית על הלוח.

צורה סטנדרטית

$$\text{maximize } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n$$

תרגיל חימום

$$\text{maximize } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{נתון שהתכנית:}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad \leftarrow$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n$$

חסומה, ו- $b_i \geq 0$. הראו שלבעיה פתרון אופטימלי עם לכל היותר 3 משתנים עם ערכים שונים מ-0.

תרגיל חימום - פתרון

$$\text{maximize } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{: slack נעבור לצורת}$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \leftarrow$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n + 3$$

כיוון שקיים פתרון פיזיבילי אופטימלי, אלגוריתם סימפלקס ימצא אחד כזה (מנכונות האלגוריתם). לפי הגדרת פתרון פיזיבילי ביחס לצורת slack, רק המשתנים הבסיסיים לא שווים 0, ויש רק 3 כאלו.

תרגיל 1

יש לכם כמות גדולה של תפוחים, אגסים ובננות לארוחת צהריים.
תפוח מכיל 10 מ"ג אבץ, 20 מ"ג אשלגן ו-30 קלוריות לכל 100 גרם.
אגס מכיל 20 מ"ג אבץ, 15 מ"ג אשלגן ו-20 קלוריות לכל 100 גרם.
בננה מכילה 5 מ"ג אבץ, 40 מ"ג אשלגן ו-50 קלוריות לכל 100 גרם.

אתם רוצים להביא למינימום את כמות הקלוריות שאתם צורכים, אבל
הדיאטה מחייבת אתכם לאכול לפחות 55 מ"ג אבץ ו-70 מ"ג אשלגן בכל
ארוחה. כמה תאכלו מכל פרי?

תרגיל 1 - פתרון

נגדיר x להיות כמות התפוחים שאנחנו אוכלים, כשיחידה אחת היא מאה גרם.

בדומה, y - כמות האגסים ו- z - כמות הבננות שאנחנו אוכלים.
נפתור את התכנית הלינארית:

$$\min 30x + 20y + 50z$$

s. t.

$$10x + 20y + 5z \geq 55$$

אילוצי אבץ

$$20x + 15y + 40z \geq 70$$

אילוצי אשלגן

$$x, y, z \geq 0$$

תרגיל 2

נתונה מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו- n נעלמים המוגדרת ע"י מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ווקטור $b \in \mathbb{R}^m$. נאמר שוקטור $x \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון ε -מקורב של המערכת אם מתקיים $\|Ax - b\|_\infty = \varepsilon$.

הראו כיצד למצוא פתרון מקורב טוב ביותר.

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_m|\}$$

תרגיל 2

נגדיר משתנה חדש ε .

נגדיר $y = Ax - b$. כלומר:

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j - b_i$$

כלומר המשתנים הם: x_j, ε

אם $\|Ax - b\|_\infty = \varepsilon$ או $\|y\|_\infty = \varepsilon$.

מכיוון ש $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_m|\}$ אז
 $|y_1|, |y_2|, \dots, |y_m| \leq \varepsilon$

פתרון תרגיל 2

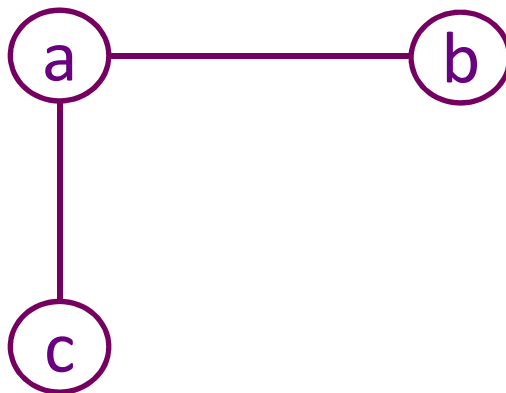
$$\begin{array}{ll} \min & \varepsilon \\ \text{s.t.} & |y_1| \leq \varepsilon \\ & |y_2| \leq \varepsilon \\ & \vdots \\ & |y_m| \leq \varepsilon \end{array}$$

תרגיל 3

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T , כך שלכל משקלים אי שלילים על הקשתות המקיימים $\sum_{e \in E} w(e) = 1$, יש צומת $v \in V$ המקיים $\sum_{v \in e} w(e) \geq T$.

תרגיל 3 – דוגמא 1

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T , כך שלכל משקלים אי שלילים על הקשתות המקיימים $\sum_{e \in E} w(e) = 1$, יש צומת $v \in V$ המקיים $\sum_{v \in e} w(e) \geq T$.



$$T = 1$$

תרגיל 3 – דוגמא 2

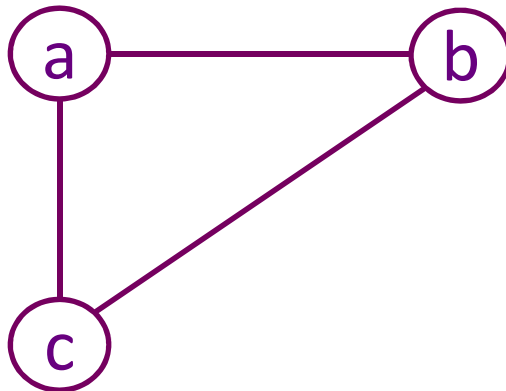
יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T , כך שלכל משקלים אי שלילים על הקשתות המקיימים $\sum_{e \in E} w(e) = 1$, יש צומת $v \in V$ המקיים $\sum_{v \in e} w(e) \geq T$.



$$T = 1/2$$

תרגיל 3 – דוגמא 3

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שיחשב את הערך המירבי T , כך שלכל משקלים אי שלילים על הקשתות המקיימים $\sum_{e \in E} w(e) = 1$, יש צומת $v \in V$ המקיים $\sum_{v \in e} w(e) \geq T$.



$$T = 2/3$$

תרגיל 3 - פתרון

$$\min T$$

$$\forall v \in V, \sum_{v \in e} w(e) \leq T$$

$$\sum_{e \in E} w(e) = 1$$

תרגיל 3 - פתרון

א. פתרון אופטימלי T^*, w^* מקיים $T^* \geq T$:
אם $T^* < T$, אז w^* מתאימה משקלים לקשתות כך שלכל צומת v :

$$\sum_{v \in e} w^*(e) \leq T^* < T$$

בסתירה להגדרת T .

ב. פתרון אופטימלי T^*, w^* מקיים $T^* \leq T$:
אם $T^* > T$, אז בפרט עבור $\frac{T^*+T}{2} > T$ קיימת פונקציה w' עבורה

אין צומת שמקיים $\sum_{v \in e} w'(e) \geq \frac{T^*+T}{2}$, כלומר:
לכל צומת v מתקיים:

$$\sum_{v \in e} w'(e) < \frac{T^* + T}{2}$$

ולכן $w', \frac{T^*+T}{2}$ פתרון פיזיבילי, בסתירה למינימליות T^* .