אלגוריתמים

פיתרון תרגיל בית 5

6 ביולי 2017

1. להחליף את המשתנה z בשני משתנים אי שליליים $z^+ - z^-$, להשתמש באלגוריתם למציאת נקודת התחלה (מצגת הרצאה 2 בתכנון ליניארי), ולהשתמש באלגורים סימפלקס כדי למצוא פתרון אופטימלי.

2. לכל קשת e ולכל משאב i יהיה משתנה x_i^e שיציין כמה משאב מסוג i מועבר בקשת e. האילוצים:
   - אילוצי חיוביות לכל משתנה.
   - לכל קשת e, יהיה אילוץ שיוודא שסכום המשאבים שמעבירים דרכה קטן מ$c(e)$.
   - לכל קודקוד שאינו s_i או t_i, נוודא שמתקיים שימור זרימה עבור משאב מסוג i.
   - נוסיף אילוץ שיבטיח שיצאו d_i משאבים מסוג i מs_i ויכנסו d_i משאבים מסוג i ל־t_i.

   פונקציית המטרה מביאה למינימום את העלות הכוללת של של סכום עלויות הקשתות עבור המשאבים שעוברים בהן.

3. משתנים: לכל עיגול i יהיה משתנה רדיוס r_i. פונקציית המטרה: סכום הרדיוסים (סכום ההיקפים לינארי בסכום הרדיוסים). אילוצים: סכום הרדיוסים בין שני מרכזים קטן שווה למרחק בין שני המרכזים.

4. המשתנים: משתנה x_j לכל משתנה במערכת משוואות הלינארית, וכן משתנה d_i עבור ערך מוחלט עבור כל קואורדינטה. אילוצים: לכל אילוץ במערכת המקורית i, נוסיף שני אילוצים $\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j - b_i \leq d_i$ ו־$b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \leq d_i$. פונקציית המטרה תהיה $min \sum_{i=1}^m d_i$.

5. א. לפי מה שעשינו בכיתה.
ב. i. כש־ii ו־iii לא מתקיימים.
ii. כשr חיובי וs שלילי (כי אז הדואלי לא חסום).
iii. כשt חיובי וr שלילי (כי אז הפרימלי לא חסום).
iiii. $r = 0, t > 0, s < 0$

6. מכיוון שהצורה ההתחלתית של התכנית הפרימלית פיזיבילית, אז ההשמה של כל המשתנים כ־0 פיזיבילית, ולכן ערך התכנית הפרימלית לפחות 0. מהכיוון שהצורה ההתחלתית של התוכנית הדואלית פיזיבילית, אז קיימת השמה שנותנת לתכנית הדואלית ערך 0. מכיוון שכל פיתרון של תכנית דואלית ערכו גדול מכל פיתרון של תכנית פרימלית, ערך התכנית הפרימלית לכל היותר 0. לכן הפיתרון האופטימלי חייב להיות עם ערך 0.

7. פתרון:
(א) המשתנים הם $f(j)$ לכל $j \in S$. פונקציית המטרה והאילוצים בגוף השאלה.
(ב) נגדיר בחירת קבוצות שברית $g : \{1, \ldots m\} \to \mathbb{R}$ כך שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים $\sum_{i:j \in A_i} g(i) \leq 1$ וגודלה יהיה $\sum_{i=1}^m g(i)$.

מציאת בחירת קבוצות שברית מקסימלית היא דואלית לבעיה המקורית. הבעיה המתאימה בשלמים בורחת תת קבוצה של $\{A_1, \ldots, A_m\}$ כך שאף איבר $j \in S$ לא מופיע פעמיים בקבוצה שנבחרה, כלומר ־ מציאת מספר מקסימלי של קבוצות זרות.

8. נכתוב ראשית את התכנית בצורה הסטנדרטית של תכנית דואלית:

$$\begin{aligned} & min\, T \\ \forall v : T - & \sum_{e:v\in e} w(e) \geq 0 \\ & \sum_{e} w(e) \geq 1 \\ - & \sum_{e:v\in e} w(e) \geq -1 \\ & w(e), T \geq 0 \end{aligned}$$

1. הדואלית: לכל אילוץ של צומת v נתאים משתנה y_v , ובנוסף יהיו שני משתנים w_1, w_2 עבור שני האילוצים האחרונים בהתאמה:

$$\begin{aligned} & max\, w_1 - w_2 \\ \forall e : w_1 - w_2 - & \sum_{v\in e} y_v \leq 0 \\ & \sum_{y} y_v \leq 1 \\ & y_v, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(א) הסכום $\sum_y y_v$ שווה 1 בכל פתרון אופטימלי. לכל פתרון פיזיבילי בו $\sum_y y_v < 1$, נוכל להגדיל את כל המשתנים y_v בקצת (ככה שהאי שיוויון יישמר), ונקבל שלכל אילוץ שמושרה מקשת e ניתן להגדיל את הערך של $w_1 - w_2$, שזוהי פונקציית המטרה, כלומר לכל פתרון פיזיבילי עם $\sum_y y_v < 1$ יש פתרון פיזיבילי עם ערך פונקציית מטרה גבוה יותר, ולכן אינו אופטימלי.

(ב) אם נכתוב עבור כל קשת e את האילוץ כך: $w_1 - w_2 \leq \sum_{v\in e} y_v$ נשים לב שצריך לשים משקלים על הצמתים כך שפונקציית המטרה (שממקסמים) חוסמת מלמטה, ואחד האילוצים בוודאי הדוק בפתרון אופטימלי (אם אף אילוץ לא הדוק נוכל להגדיל את פונקציית המטרה). בנוסף, ניתן לשים לכל היותר 1 משקל בסה"כ. לכן הבעיה היא לפזר משקל של 1 על הצמתים, אשר ממקסם את המשקל המינימלי שנמצא על קשת.