אלגוריתמים

פיתרון תרגיל בית 3

3 ביולי 2017

1. נחשב את $\delta(s,v)$ לפי w_1. נחשב את גרף המסלולים הקלים ביותר לפי w_1 (נשאיר את כל הקשתות המקיימות $w_1(u,v) = \delta(s,v) - \delta(s,u)$). על הגרף הזה נמצא את המסלול הקל ביותר לפי w_2. זמן ריצה: $O(|E||V|)$ (להריץ בלמן פורד, לעבור על כל הקשתות, להריץ בלמן פורד על הקשתות שנשארו).

2. נשכפל כל קודקוד v פעמיים - v_{red} ו־v_{blue}. כל קשת כחולה (לא משנה מאיזה צד) תחבר אותנו לעותק הכחול של הקודקוד. באותו אופן, כל קשת אדומה תחבר אותנו לעותק האדום. לקשתות מעותק בצבע אחד לצבע שני נתן משקל 1ולקשתות משני עותקים באותו צבע נתן משקל 0. נריץ דייקסטרא על הגרף ונחליף את תור העדיפויות לתור העדיפויות המאפשר פעולות בזמן קבוע כפי שלמדנו בתרגול (המרחק המקסימלי הוא $|V|-1$). זמן ריצה: $O(|V|+|E|)$.

3. נריץ דייקסטרא מ־s. נהפוך את כיווני הקשתות ונריץ שוב דייקסטרא מ־s. המעגל הוא המסלול מ־s ל־v בדייקסטרא הראשון והמסלול מ־s ל־vבדייקסטרא השני (שהוא למעשה המסלול מ־v ל־s בדרף המקורי). זמן ריצה: $O(|E|\log|V|)$ (פעמיים דייקסטרא + הפיכת קשתות הגרף).

4. א. נשים לב שאין קשתות נכנסות ל־s, לכן $\delta(s,s) = 0$. כמו כן, בכל מסלול מ־s ל־u, הקשת השלילית היחידה שיכולה להיות חלק מהמסלול היא הראשונה. נחזור להוכחת הנכונות של דייקסטרא - נוכיח באינדוקציה שעבור כל צומת u שנכנס ל־S, $d(u) = \delta(s,u)$. נניח בשלילה שלא ויהי u הצומת הראשון שנכנס ל־S עבורו התנאי אינו מתקיים. לפני הכנסת u ל־S, נסתכל על p - המסלול הקל ביותר מ־s ל־u. יהי צומת y הצומת הראשון בין s ל־u שאינו ב־S ויהי x הצומת לפניו. נסתכל על המרכיבים של המסלול p - p_1: המסלול מ־s ל־x, הקשת בין x ל־y, ו־p_2: המסלול מ־y ל־u (שימו לב ש־p_1 ו־p_2 יכולים להיות ריקים). נשים לב שאין קשתות שליליות ב־p_2. מכיוון שעשינו $relax$ מ־x, מתקיים $d(y) = \delta(s,y)$. בגלל שהקשתות ב־p_2 אי־שליליות, $\delta(s,y) \leq \delta(s,u)$. מכיוון שהכנסנו את u ל־S לפני y, $d(u) \leq d(y)$. מכאן $d(u) = \delta(s,u)$ כנדרש.
ב. ישנה דוגמא נגדית.

5. נמצא את הרק״חים של הגרף. בכל רק״ח נבדוק אם יש מעגל שלילי ונסמן אותו אם כן. נבנה את גרף העל ונהפוך את כיוון הקשתות (גרף זה עדיין חסר מעגלים). נמיין טופולוגית את הגרף ונסמן כל קודקוד שנגיש מאחד מהקודקודים המסומנים (בדומה למה שנעשה בתרגול). נחזיר את כל הקודקודים הנמצאים ברק״חים המסומנים. זמן ריצה: בניית רק״ח $O(|E|+|V|)$, בדיקת מעגלים שליליים בכל הרק״חים יחדיו בעזרת $B-F$ $O(|E||V|)$, בניית גרף על, הפיכת הקשתות, מיון טופולוגי ומעבר על הקודקודים לפי סמן המיון $O(|E|+|V|)$. סה״כ: $O(|E||V|)$.

6. נריץ את פלויד־וורשל לפי הסדר הנתון. נשמור את כל המטריצות שקיבלנו. המטריצה ה־j תחזיק את הפתרון עבור כל הזוגות (i,j) כך ש $i < j$.נחפש את המינימום בין מסלול $u \to x \to v$ ו־$u \to y \to v$.

7. נריץ דייקסטרא מ־x ומ־y על הגרף G, ועל הגרף G', בו הקשתות הפוכות. זה יתן את המסלולים הקצרים ביותר היוצאים מ והנכנסים ל־x ו־y.

8. נבדוק מה היא המטריצה הראשונה שיש בה מספר שלילי על האלכסון.