אלגוריתמים תרגיל בית 2 פתרונות

שאלה 1

מצאו רק"חים, ובדקו אם יש k רק"חים שאין אף קשת שיוצאת ממנו. אם כן, החזירו קודקוד אחד מכל רק"ח.

שאלה 2 (פתרון מלא)

א. נגדיר את W כקבוצת הקודקודים המבוקשת, ונאתחל $W = \emptyset$. מכל קודקוד $v \in V$, נריץ BFS ונבדוק אם ניתן להגיע ממנו לבדיוק k קודקודים נוספים. אם כן, נוסיף את v ל-W. נשים לב שאם הגענו ל $k+1$ - קודקודים, נוכל לעצור את ריצת ה BFS כי v לא יתווסף ל-W. זמן הריצה של BFS על k קודקודים הוא $O(k^2)$ ולכן זמן הריצה של BFS יהיה $O(k^2)$ לכל קודקוד, וסך הכל נקבל שסיבוכיות האלגוריתם היא $O(k^2|V|)$.

ב. נגדיר ונאתחל את W כמו בסעיף א'. נריץ DFS על G ונמצא רכיבי קשירות. נכניס את קודקודי רכיב קשירות G' ל-W אמ"ם יש בו $k+1$ קודקודים. זמן הריצה הוא של BFS + זמן מעבר על כל הקודקודים: $O(|V|+|E|)$.

שאלה 3

נחזיק משתנה $root$, ונאתחל אותו להיות השורש הראשון של ה DFS שלנו. כשגיע לקודקוד v, נעדכן $root(v) = root$. כשחליף שורש, נעדכן את $root$.

שאלה 4

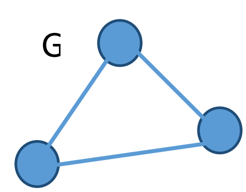
נמצא את גרף העל G', ולכל רכיב קשירות $v' \in G'$, נסמן את מספר הקודקוד הקטן ביותר $v \in G$ ברכיב הקשירות ע"י $young(v')$. נמיין את G' טופולוגית, נעבור עליו מהסוף להתחלה ונעדכן לכל קודקוד את $\rho(v)$.

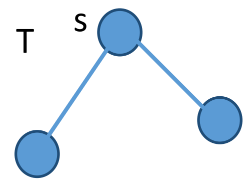
שאלה 5

[redacted] הקשתות $(parent, child)$ עבורן $low(child) > d(parent)$.

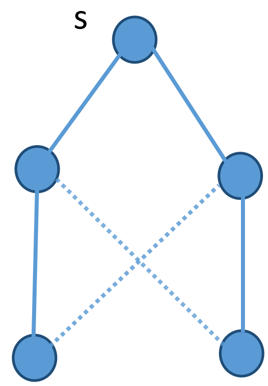
שאלה 6

א.





ב.



שאלה 7

א. נניח שיש סידור אחר אז קיימת קשת בכוון הלא נכון.

ב. נכון .מספיק להוכיח את הלמה הבאה: אם אין קשת בין 2 קודקודים צמודים במיון הטופולוגי, ניתן להחליף ביניהם ולקבל מיון טופולוגי תקין.

שאלה 8

א. נוריד את כל הקשתות e' אשר עבורם $w(e') \geq w(e)$. נבדוק האם קיים מעגל עם הקשתות שנשארו והקשת $e(u,v)$ (הרצת DFS למצוא מסלול מ- v ל- u).
משפט: קיים מעגל כזה אם"ם אין עפ"מ המכיל את e .
הוכחה: <= נניח שקיים מעגל כזה. נניח בשלילה ש $e=(u,v)$ היא חלק מעפ"מ T. נוריד את e ונקבל שני רכיבי קשירות. נוסיף את אחת מקשתות המעגל שמחברות בין רכיבי הקשירות של u ו- v (קיימת לפחות אחת כזאת). קיבלו עץ עם משקל קטן מ- T.
=>נניח שאין אף עפ"מ המכיל את $e=(u,v)$. באלגוריתם של קרוסקל גם עבור המיון כש e הראשונה במשקל שלה, האלוגריתם לא הוסיף אותה, לכן היא סוגרת מעגל בו e היא הקשת הכבדה ביותר.

ב. נוריד את כל הקשתות e' אשר עבורם $w(e') > w(e)$. האם בגרף שנשאר קיים מעגל המכיל את הקשת e (ע"י הורדת $e=(u,v)$ והרצת DFS למצוא מסלול מ- v ל- u).

ג. משפט: קיים מעגל כזה אם"ם קיים עפ"מ שלא מכיל את e .
הוכחה: <= נניח שקיים מעגל כזה. נניח בשלילה ש e היא חלק מכל עפ"מ. כמו בסעיף הקודם נתחיל עם עפ"מ ונוריד את e .נוסיף את אחת מקשתות המעגל שמחברות בין רכיבי הקשירות של uו- v וכיוון שמשקל הקשת שנשארנו איתה במקום e קטן שווה למשקל e, קיבלנו עפ"מ ללא e.
=>נניח שקיים עפ"מ T שלא מכיל את e. אם נוסיף את הקשת e קיבלנו מעגל שבו כל הקשתות במשקל שווה או קטן למשקל e, אחרת נחליף את הקשת הכבדה ביותר בe, וקיבלנו עפ"מ במשקל קטן מT.