אלגוריתמים

תרגיל בית 6

להגשה עד יום שני, 10/07/16, שעה 9:00

<u>הנחיה כללית</u>: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ מ־s ל־t עם קיבולים שלמים ונתונה זרימה מקסימלית בה $f:E\to\mathbb{Z}$ שחושבה ע"י אלגוריתם Ford-Fulkerson. תארו אלגוריתם יעיל לעדכון f במקרים הבאים:

   (א) מגדילים ב־1 את הקיבול של קשת מסויימת $e^*\in E$.

   (ב) מקטינים ב־1 את הקיבול של קשת מסויימת $e^*\in E$.

2. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ מ־s ל־t ונתונה קשת $e\in E$.

   (א) תארו אלגוריתם יעיל הבודק האם <u>קיים</u> חתך (s,t) מקיבול מינימלי כך ש־e חוצה אותו.

   (ב) תארו אלגוריתם יעיל הבודק האם e חוצה <u>כל</u> חתך (s,t) מקיבול מינימלי.

3. נסמן $S=\{1,2,\dots,n\}$ ותהיינה $\{A_1,\dots,A_k\},\{B_1,\dots,B_k\}$ שתי חלוקות של S ל־$1<k<n$ חלקים זרים.[1] תארו אלגוריתם יעיל לחישוב תת־קבוצה $T\subset S$ בת k איברים החותכת את כל $2k$ הקבוצות (אם קיימת כזו); כלומר, לכל $1\le i\le n$ מתקיים $A_i\cap T\neq\varnothing$, $B_i\cap T\neq\varnothing$.

4. נתונים רשת זרימה מכוונת $G=(V,E)$ וזוג צמתים $s,t\in V$, כך שבנוסף לפונקצית הקיבול על הקשתות $c:E\to\mathbb{R}_+$, קיימת גם פונקצית קיבול על הצמתים $d:(V\setminus\{s,t\})\to\mathbb{R}_+$. זרימה ברשת זו תיקרא חוקית אם היא מקיימת את כל אילוצי הזרימה הרגילים, ובנוסף הזרימה שעוברת בכל צומת אינה עולה על קיבולו.

   (א) תארו אלגוריתם יעיל למציאת זרימה חוקית מקסימלית מ־s ל־t.

   (ב) כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון שכל קיבולי הצמתים הם 1? (ניתן להניח שאין קשת מ־s אל t).

5. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם יעיל המכוון את קשתות הגרף כך שלכל צומת דרגת יציאה לפחות 3 (או מודיע שלא ניתן לעשות זאת).

6. נתונים גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$, פונקצית משקל $w:E\to\mathbb{R}$, קשת $e\in E$, ומספר שלם $k>0$. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע האם ניתן להסיר מן הגרף לכל היותר k קשתות, כך שהקשת e תהיה שייכת לעץ פורש מינימלי של הגרף שיתקבל.
   רמז: מומלץ להשתמש באלגוריתם שראינו באחד מהתירגולים בנושא זרימה.

7. נתונות m מכונות ו־n משימות. עבור כל משימה i נתונה רשימה $L_i\subseteq\{1,\dots,m\}$ של מכונות המסוגלות לבצעה, ונסמן את סך ארכי הרשימות ב־$N=\sum_{i=1}^{n}|L_i|$. עבור השמה של המשימות למכונות (קרי: כל משימה משוייכת למכונה אחת בדיוק), נגדיר את העומס W_j של מכונה j להיות מספר המשימות שעליה לבצע ונגדיר את העומס הכללי כ־$W=\max\{W_j\}_{j=1}^{m}$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת השמה הממזערת את העומס הכללי.

[1] במילים אחרות, $\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\bigcup_{i=1}^{k}B_i=S$ ולכל $1\le i<j\le k$, $A_i\cap A_j=B_i\cap B_j=\varnothing$.

8. עבור כל d טבעי, הוכיחו שבכל גרף דו־צדדי d־רגולרי (גרף d־רגולרי הוא גרף שדרגות כל קודקודיו שוות ל־d בדיוק) קיים זיווג מושלם.