אלגוריתמים

תרגיל בית 6

להגשה עד יום חמישי, 2 ביולי, שעה 23:59

בתרגיל זה תוכלו לבחור לא להגיש שתי שאלות (ניקוד מלא על 6 שאלות יזכה בציון מלא).
ניתן להגיש יותר מ־6 שאלות ולקבל יותר מ־100 בתרגיל.

<u>הנחיה כללית</u>: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ מ־s ל־t עם קיבולים שלמים ונתונה זרימה מקסימלית בה $f:E\to\mathbb{Z}$ שחושבה ע"י אלגוריתם Ford-Fulkerson. תארו אלגוריתם יעיל לעדכון f במקרים הבאים:
   (א) מגדילים ב־1 את הקיבול של קשת מסויימת $e^*\in E$.
   (ב) מקטינים ב־1 את הקיבול של קשת מסויימת $e^*\in E$.

2. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ מ־s ל־t ונתונה קשת $e\in E$.
   (א) תארו אלגוריתם יעיל הבודק האם <u>קיים</u> חתך (S,T) מקיבול מינימלי כך ש־e חוצה אותו.
   (ב) תארו אלגוריתם יעיל הבודק האם e חוצה <u>כל</u> חתך (S,T) מקיבול מינימלי.

3. נתונים גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$, פונקצית משקל $w:E\to\mathbb{R}$, קשת $e\in E$, ומספר שלם $k>0$. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע האם ניתן להסיר מן הגרף לכל היותר k קשתות, כך שהקשת e תהיה שייכת לעץ פורש מינימלי של הגרף שיתקבל.
   רמז: מומלץ להשתמש באלגוריתם שראינו באחד מהתירגולים בנושא זרימה.

4. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s, בור t ופונקציית קיבול חיובית $c:E\to\mathbb{R}^{>0}$. כמו כן, נתונה זרימה מקסימלית f מ־s ל־t ברשת.
   תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שבודק האם קיימים ברשת לפחות שני חתכים שונים (S_1,T_1), (S_2,T_2) שכל אחד מהם הוא מינימלי.

5. נתונות m מכונות ו־n משימות. עבור כל משימה i נתונה רשימה $L_i\subseteq\{1,\ldots,m\}$ של מכונות המסוגלות לבצעה, ונסמן את סך ארכי הרשימות ב־$N=\sum_{i=1}^{n}|L_i|$. עבור השמה של המשימות למכונות (קרי: כל משימה משוייכת למכונה אחת בדיוק), נגדיר את העומס W_j של מכונה j להיות מספר המשימות שעליה לבצע ונגדיר את העומס הכללי כ־$W=\max\{W_j\}_{j=1}^{m}$.
   תארו אלגוריתם יעיל למציאת השמה הממזערת את העומס הכללי.

6. מפלגת "אלגוריתמים לישראל" נערכת מבעוד מועד להתמודדות בבחירות הבאות ורוצה לבחור עמדות שיקנו לה פופולריות. יש n נושאים על סדר היום, ועבור כל אחד מהם צריך להחליט מהי עמדת המפלגה (בעד או נגד). אם המפלגה תומכת בנושא i אז היא תשלם על כך מחיר בדעת־הקהל בגובה x_i, ואם היא מתנגדת אז היא תשלם מחיר בדעת־הקהל בגובה y_i. כמו כן, נתונה קבוצה $Z=\{((\{i_k,j_k\},z_k)\}_{k=1}^{m}$; לכל k, הנושאים i_k,j_k הם קרובים רעיונות, ולכן תמיכה באחד מהם והתנגדות לאחר נתפסת כחוסר עקביות וכרוכה בתשלום של מחיר בדעת־הקהל בגובה z_k. מתקיים $x_i,y_i,z_k>0$ לכל i,k. תארו אלגוריתם יעיל לבחירת עמדות המפלגה, שיביאו את המפלגה לתמיכה ציבורית גדולה ככל הניתן.

7. עבור כל d טבעי, הוכיחו שבכל גרף דו־צדדי d־רגולרי (גרף d־רגולרי הוא גרף שדרגות כל קודקודיו שוות ל־d בדיוק) קיים זיווג מושלם. (הערה: ניתן לפתור גם ללא שימוש במשפט הול).

8. נסמן $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ותהיינה $\{A_1, \ldots, A_k\}, \{B_1, \ldots, B_k\}$ שתי חלוקות של S ל־$1 < k < n$ חלקים זרים.[1] תארו אלגוריתם יעיל לחישוב תת־קבוצה $T \subset S$ בת k איברים החותכת את כל $2k$ הקבוצות (אם קיימת כזו); כלומר, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $A_i \cap T \neq \varnothing$, $B_i \cap T \neq \varnothing$.

בהגשה ב־gradescope יש לסמן את כל העמודים שמתאימים לשאלה ולא רק את הראשון.
יש להקפיד על צילום ברור.

בהצלחה!

[1] במילים אחרות, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$ ולכל $1 \leq i < j \leq k$, $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \varnothing$.