אלגוריתמים

תרגיל בית 5

להגשה עד יום שני, 19 ביוני, שעה 12:00

<u>**הנחיה כללית:**</u> בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. פתרו את התכנית הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} \max\ 3x + 2y + z \text{ s.t.} \\ x - y + z \leq 4 \\ 2x + y + 4z \leq 8 \\ x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

2. נסחו את הבעיה הבאה כתכנית לינארית.
נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית קיבול אי־שלילית על הקשתות $c : E \to \mathbb{R}^+$, ופונקציית מחיר אי־שלילית על הקשתות $p : E \to \mathbb{R}^+$. בנוסף נתונה רשימת שלשות $(s_i, t_i, d_i) \in V \times V \times \mathbb{R}^+$. ברצוננו לשנע m סוגים של מחצבים בעזרת הרשת. עבור $i = 1, 2, \ldots, m$, יש להעביר d_i ק"ג של מחצב i ממכרה הממוקם בצומת s_i למפעל הממוקם בצומת t_i. עלות השימוש בקשת $e \in E$ היא $p(e)$ שילינג לכל ק"ג שעובר דרכה, ללא תלות בסוג המחצב; בנוסף, סך המשקל שיכול לעבור בקשת זו מוגבל ל־$c(e)$ ק"ג לכל היותר. מבין אסטרטגיות השינוע אשר מספקות את האילוצים לעיל, אנו מחפשים אחת שמביאה למינימום את העלות הכוללת, שהיא סכום עלויות הקשתות.

3. רישמו את התוכנית הלינארית המתאימה לבעיה הבאה ואת התוכנית הדואלית לה.
נתונות n נקודות שונות במישור $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. רוצים לצייר n עיגולים גדולים ככל האפשר במישור (קרי: סכום היקפי העיגולים צריך להיות מירבי) כך שהנקודה (x_i, y_i) היא מרכזו של עיגול i והעיגולים זרי־פנים בזוגות. במילים אחרות, אסור ששני עיגולים ייחתכו או שעיגול יכיל עיגול אחר בתוכו; מותר לשני עיגולים להשיק זה לזה כל עוד אין להם נקודות פנימיות משותפות.[1]

4. נתונה מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים המוגדרת ע"י מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ווקטור $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$. נאמר שוקטור $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ הוא *פתרון ϵ־מקורב* של המערכת אם מתקיים $\left\|A\bar{x} - \bar{b}\right\|_1 = \epsilon$.[2]
הראו כיצד ניתן להשתמש בתכנון לינארי כדי לחשב פתרון מקורב טוב ביותר (דהיינו, ϵ־מקורב עבור ϵ מינימלי).

5. להלן תכנית לינארית P במשתנה אחד בצורה הסטנדרטית:

$$\begin{aligned} \max\ tx \text{ s.t.} \\ rx \leq s \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

(א) רשמו את התכנית הדואלית D.
(ב) לאילו ערכי r, s, t מתקיים ש:
   i. שתי התכניות פיזיביליות.
   ii. D פיזיבילית ו־P לא פיזיבילית.
   iii. P פיזיבילית ו־D לא פיזיבילית.
   iv. שתי התכניות לא פיזיביליות.

6. נתונה תכנית לינארית P בצורה הסטנדרטית. הוכיחו כי אם צורת ה־slack ההתחלתית של P וצורת ה־slack ההתחלתית של הבעיה הדואלית שתיהן פיזיביליות, אז הפתרון האופטימלי עבור P הינו 0.

7. נתונות קבוצה $S = \{1, 2, ..., n\}$ ו־m תת־קבוצות $A_1, A_2, ..., A_m \subset S$.

---

[1] נקודה בפני עצמה נחשבת כעיגול עם רדיוס 0 והיקף 0; מותר לה להשיק לעיגול אחר (קרי, להיות על שפתו) אך לא להיות בתוכו.
[2] תזכורת: נורמת ℓ_1 של וקטור $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ מוגדרת כ־$\|\bar{a}\|_1 = \sum_{i=1}^m |a_i|$.

(א) נגדיר *קבוצה מכסה שברית* כפונקציה $f : S \to \mathbb{R}^+$ כך שלכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $\sum_{j \in A_i} f(j) \geq 1$ ונסמן את גודלה ב–$|f| = \sum_{j \in S} f(j)$. כתבו תוכנית לינארית P למציאת קבוצה מכסה מגודל מינימלי.

(ב) כתבו את התכנית הדואלית של P, איזו בעיה התכנית הדואלית של P פותרת, אילו היו מאלצים את המשתנים לקבל ערכים שלמים? תארו במילים.

8. (א) כתבו את התכנית הדואלית של הפתרון של תרגיל 3 בתרגול הראשון על תכנון לינארי (נמצא במצגת).

(ב) מצאו תת קבוצה של משתנים בתכנית שכתבתם, אשר הסכום שלהם קבוע בכל פתרון אופטימלי. מהו הקבוע?

(ג) איזו בעיה התכנית שכתבתם מתארת? תארו במילים.

בהצלחה!