

אלגוריתמים

תרגיל בית 4

להגשה עד יום ראשון, 4 ביוני, שעה 12:00

הנחיה כללית: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, זוג צמתים $s, t \in V$ וצמד פונקציות משקל $w_1, w_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$. ידוע שאין בגרף מעגלים שליליים, הן ביחס ל w_1 והן ביחס ל w_2 . תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא, מבין המסלולים הקלים ביותר מ- s ל- t ביחס ל- w_1 , מסלול קל ביותר מ- s ל- t ביחס ל- w_2 .

2. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ שבו לכל קשת צבע אדום או כחול, ונתונים זוג צמתים שונים $s, t \in V$. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא מסלול מכוון מ- s ל- t שמספר שינויי הצבע לאורכו הוא מינימלי, או שיודיע שלא קיים מסלול כזה.

3. נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל אי-שלילית $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, וצומת $s \in V$. תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא לכל צומת $v \in V$ את המעגל הקל ביותר אשר מכיל גם את v וגם את s (קשת עשויה להשתתף במעגל מספר פעמים).

4. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ ונתון צומת $s \in V$ כך שכל צומת אחר נגיש ממנו בגרף. לכל אחד מהמקרים הבאים, הוכיחו או הפריכו את הטענה: "מובטח שריצת דייקסטרה על G מהצומת s תחזיר עץ מק"בים".

(א) נתון שכל הקשתות ממשקל שלילי יוצאות מ- s ושאינן קשתות שנכנסות ל- s .

(ב) נתון שיש קשת שלילית אחת e^* ממשקל $-x$ ולכל קשת אחרת $e \neq e^*$ מתקיים $w(e) > x$.

5. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא את אוסף כל הצמתים v שיש מהם מסילה מכוונת אל מעגל שלילי ב- G .

6. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ על קבוצת הצמתים $V = \{1, 2, \dots, n\}$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ וידוע שאין ב- G מעגלים במשקל שלילי. תארו אלגוריתם יעיל שמחשב לכל $1 \leq i < j \leq n$ את משקל המסלול הקל ביותר $i \rightsquigarrow j$ מבין המסלולים שלא עוברים באף אחד מבין הצמתים $\{j+1, j+2, \dots, n\}$.

7. נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל אי-שלילית $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ וזוג צמתים $x, y \in V$. תארו אלגוריתם יעיל שמחשב לכל זוג צמתים $u, v \in V$ את משקל המסלול הקל ביותר מבין המסלולים (הלאו דווקא פשוטים) $u \rightsquigarrow v$ שעוברים דרך x ו/או דרך y .

8. בצעו שינוי באלגוריתם למציאת מק"בים המבוסס על כפל מטריצות, כך שהוא יהפוך לאלגוריתם למציאת אורך המעגל השלילי הקצר ביותר (ביחס למס' הקשתות) בגרף. אין צורך למצוא את קשתות המעגל. תארו את סיבוכיות האלגוריתם ונתחו את נכונותו.