

# אלגוריתמים

## תרגיל בית 4

להגשה עד יום חמישי, 21 במאי, שעה 22:00

הנחיה כללית: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם משקולות חיוביים  $W_{i,j}$  לקשתות, ועשרה צמתים הנקראים **צמתי תצפית**. וירוס מסוג  $A$  מתחיל להתפשט בגרף בזמן 0 מצומת מקור (יחיד) לא ידוע ומדביק בהדרגה כל צומת שהוא מגיע אליו. אם הוירוס נמצא בצומת  $x$  אז כל שכן  $y$  (שיש אליו קשת יוצאת  $x$ ) יידבק בדיוק אחרי זמן  $W_{x,y}$  (אם  $y$  עדיין לא הודבק עד זמן זה). ענו על הסעיפים הבאים:

(א) נתונים זמני ההדבקה בעשרת צמתי התצפית. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המשחזר מהי קבוצת הצמתים שיכולים להיות מקור המחלה.

(ב) כעת נתון שיש שני סוגים של וירוסים, סוג  $A$  וסוג  $B$  (הידבקות בוירוס מסוג  $A$  לא מחסנת מהדבקה מסוג  $B$  או להיפך). סוג  $A$  מתפשט בהתאם למשקולות  $W_{i,j}$  וסוג  $B$  מתפשט במהירות כפולה. עבור כל אחד מצמתי התצפית, זמן ההדבקה הוא הזמן הראשון בו הצומת נדבק באחד הסוגים, וזמנים אלו נתונים יחד עם הסוג בו נדבקו (ניתן להניח שלא התרחשה הדבקה בשני הסוגים בדיוק באותו רגע). בנוסף לזמני ההדבקה, נתונה קבוצת צמתים  $Z \subseteq V$  (בגודל לא ידוע מראש ולא קבוע) שהיא קבוצה של **מדביקי-על**. כאשר וירוס מסוג  $A$  מדביק צומת שהוא מדביק-על, הוא עובר מוטציה לוירוס מסוג  $B$ . גם הפעם, וירוס מסוג  $A$  מתחיל להתפשט מצומת מקור (יחיד) ברשת בזמן 0: תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המשחזר מהי קבוצת הצמתים שיכולים להיות מקור המחלה, בהינתן זמני (וסוגי) ההדבקה בעשרת צמתי התצפית, והקבוצה  $Z$ .

2. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  שבו לכל קשת צבע אדום או כחול, ונתונים זוג צמתים שונים  $s, t \in V$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא מסלול מכוון מ- $s$  ל- $t$  שמספר שינויי הצבע לאורכו הוא מינימלי, או שידוע שלא קיים מסלול כזה.

3. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם פונקציית משקל אי-שלילית על הקשתות  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , ונתונים צמתים שונים  $s, t \in V$ . נסמן ב- $\mathcal{P}$  את קבוצת המסלולים  $s \rightsquigarrow t$  שאינם קלים ביותר (ביחס ל- $w$ ). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב  $p \in \mathcal{P}$  ממשקל מינימלי (ניתן להניח ש- $\mathcal{P}$  אינה ריקה; שימו לב ש- $\mathcal{P}$  איננה נתונה).

4. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם פונקציית משקל  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  ונתון צומת  $s \in V$  כך שכל צומת אחר נגיש ממנו בגרף. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם נתון שכל הקשתות ממשקל שלילי יוצאות מ- $s$  ושאינן קשתות שנכנסות ל- $s$ , מובטח שריצת דייקסטרה על  $G$  מהצומת  $s$  תחזיר עץ מק"בים.

(ב) אם נתון שיש קשת שלילית אחת  $e^*$  ממשקל  $-x$  ולכל קשת אחרת  $e \neq e^*$  מתקיים  $w(e) > x$ , מובטח שריצת דייקסטרה על  $G$  מהצומת  $s$  תחזיר עץ מק"בים.

(ג) אם נתון שכל המשקלים חיוביים, ואין מעגלים, אז אם נבצע את השינויים הבאים לדייקסטרה:

i. בשלב האתחול נבצע  $d[v] = -\infty$  לכל  $v \neq s$  (במקום  $d[v] = \infty$ );

ii. נשתמש בערימת מקסימום (במקום ערימת מינימום);

iii. בפעולת ה-Relax נבדוק אם  $d[v] < d[u] + w(u, v)$  (במקום  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ );  
 אז בסוף הריצה לכל  $v$ , יהיה המשקל של מסלול ארוך ביותר מ- $s$  ל- $v$ .

5. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  ופונקציית משקל על הקשתות  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא את אוסף כל הצמתים  $v$  שיש מהם מסילה מכוונת אל מעגל שלילי ב- $G$ .

6. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  על קבוצת הצמתים  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  עם פונקציית משקל  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  וידוע שאין ב- $G$  מעגלים במשקל שלילי. תארו אלגוריתם יעיל שמחשב לכל  $1 \leq i < j \leq n$  את משקל המסלול הקל ביותר  $i \rightsquigarrow j$  מבין המסלולים שלא עוברים באף אחד מבין הצמתים  $\{j+1, j+2, \dots, n\}$ .

7. נתונים גרף מכוון  $G = (V, E)$ , פונקציית משקל אי-שלילית  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  וזוג צמתים  $x, y \in V$ . תארו אלגוריתם יעיל שמחשב לכל זוג צמתים  $u, v \in V$  את משקל המסלול הקל ביותר מבין המסלולים (הלאו דווקא פשוטים)  $u \rightsquigarrow v$  שעוברים דרך  $x$  או דרך  $y$ .

8. בצעו שינוי באלגוריתם למציאת מק"בים המבוסס על כפל מטריצות, כך שהוא יהפוך לאלגוריתם למציאת אורך המעגל השלילי הקצר ביותר (ביחס למס' הקשתות) בגרף. אין צורך למצוא את קשתות המעגל. תארו את סיבוכיות האלגוריתם ונתחו את נכונותו.

בהגשה ב-gradescope יש לסמן את כל העמודים שמתאימים לשאלה ולא רק את הראשון.  
 אם לא עשיתם שאלה כיתבו במקומה 'לא עשיתי'.  
 יש להקפיד על צילום ברור.

בהצלחה!