

אלגוריתמים

תרגיל בית 3

להגשה עד יום שישי, 19 במאי, שעה 12:00

הנחיה כללית: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתונים גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ועץ פורש מינימלי T של G . מוסיפים ל- G צומת חדש v , קשתות מ- v לחלק מצמתי V , ומשקלים עבור קשתות אלה. תארו אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי של הגרף החדש, שרץ בזמן $O(|V| \log |V|)$.

2. נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$. תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם ל- G יש לפחות שני עצים פורשים מינימליים.

3. נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$, ופונקצית משקל $w : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$ המתאימה לכל קשת מספר שלם. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן המוצא את אוסף כל הקשתות e של G עבורן יש מעגל C ב- G שמכיל את e , כך שלכל $e' \in C$, $e' \neq e$ מתקיים $w(e) > w(e')$.

4. נתון מערך של מספרים ממשיים a_1, a_2, \dots, a_n ומספר טבעי $d \leq n$. d -חלוקה של המערך הינה חלוקה שלו ל- d מקטעים רציפים לא ריקים. נגדיר את המחיר של מקטע כסכום איבריו והמחיר של חלוקה כמחיר המקסימלי של מקטע שלה. תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא d -חלוקה עם מחיר מינימלי.

5. שני שחקנים נבונים A^1 ו- B , משחקים במשחק הבא: נתונה סדרה של n מספרים מסודרים בשורה משמאל לימין. השחקנים משחקים לסירוגין כשכל אחד בתורו לוקח את המספר הימני ביותר או את המספר השמאלי ביותר. שחקן A משחק ראשון. לאחר שנלקחו כל המספרים, ערך המשחק מחושב להיות סכום המספרים ששחקן A בחר פחות סכום המספרים ששחקן B בחר. מטרת שחקן A היא למקסם את ערך המשחק, בעוד ששחקן B מנסה למנס את ערך המשחק. תארו אלגוריתם יעיל שמקבל סדרת מספרים באורך n ומחשב את ערך המשחק.

דוגמא: בהינתן הסדרה $6, 3, 3, 8, 2, 1$, ערך המשחק הוא $7 = 6 - 3 + 1 - 3 + 8 - 2$.

6. בקפיטריה יש n מגשי אוכל ריקים. נתון כי מגש i הוא באורך l_i וברוחב w_i . ניתן למקם את מגש i מעל מגש j אם $l_i \leq l_j$ וגם $w_i \leq w_j$. על כל מגש ניתן להניח ישירות רק מגש אחד (כלומר אסור למגש להכיל שני מגשים ישירות עליו, זה לצד זה). ניתן לסובב מגש ב-90 מעלות על מנת שנוכל למקם אותו על מגש אחר, אך כל המגשים צריכים להיות מקבילים לצירים (כלומר, אסור לשים מגשים באלכסון, ולכן סיבוב שקול להחלפה בין האורך והרוחב). ניתן להניח כי $\{l_i, w_j\}_{i=1}^n$ הם מספרים ממשיים חיוביים שונים. תארו אלגוריתם יעיל המחשב ערימה גדולה ככל האפשר של מגשים הניתנים למיקום אחד על השני.

7. נתונות m פונקציות $f_1, f_2, \dots, f_m : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow Z$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמוצא מספרים שלמים x_1, x_2, \dots, x_m שמקסמים את הסכום $\sum_{i=1}^m f_i(x_i)$ תחת האילוץ $\sum_{i=1}^m x_i \leq m$.

8. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, ופונקצית משקל על הקשתות $w : E \rightarrow R$, וצומת $r \in V$. נניח שאין מעגלים שליליים בגרף. נתון שאין בגרף מסלול פשוט שמספר קשתותיו גדול מ- k . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא עץ מסילות קלות ביותר מהצומת r (שימו לב - k אינו קבוע, אלא פרמטר שיכול להופיע בזמן הריצה, כמו $|E|$ ו- $|V|$).

בהצלחה!

¹כלומר, משחקים אופטימלית תוך צפייה מראש של מהלכיו הסבירים של השחקן האחר.