

# אלגוריתמים

## תרגיל בית 3

להגשה עד יום רביעי, 06 במאי, 22:00 בערב

**הנחיה כללית:** בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

ההגשה דרך gradescope בלבד. 4-6 נקודות ניתנות על סריקה באיכות מספיקה והגשה לפי ההנחיות, ושארית הציון מורכבת מ-7 השאלות הטובות.

1. נתונים גרף קשיר ולא מכוון  $G = (V, E)$  ועץ פורש מינימלי  $T$  של  $G$ . מוסיפים ל- $G$  צומת חדש  $v$ , קשתות מ- $v$  לחלק מצמתי  $V$ , ומשקלים עבור קשתות אלה. תארו אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי של הגרף החדש, שרץ בזמן  $O(|V| \log |V|)$ .

2. נתונים גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  עם משקלים על הקשתות ומספר  $k$  שלם חיובי. עבור תת קבוצה  $E' \subseteq E$ , תת הגרף  $G' = (V, E')$  נקרא יער  $k$ -פורש אם הוא יער בן  $k$  עצים בדיוק. יער  $k$ -פורש של  $G$  נקרא מינימלי אם סכום משקלי הקשתות שלו אינו גדול מסכום משקלי הקשתות של אף יער  $k$ -פורש אחר של  $G$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן למציאת יער  $k$ -פורש מינימלי של  $G$ .

3. נתון  $G = (V, E)$  לא מכוון וקשיר, ופונ' משקל  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו את הטענה: אם  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונ' מונטונית עולה (לאו דווקא ממש) ו- $T$  הוא עפ"מ של  $G$  ביחס לפונ' המשקל  $w$ , אז  $T$  הוא גם עפ"מ של  $G$  ביחס לפונ' המשקל  $f(w)$ .

(ב) הוכיחו את הטענה: אם  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונ' מונטונית עולה **ממש**, אז לכל  $T, T'$  הוא עפ"מ של  $G$  ביחס ל- $w$  אם"ם הוא עפ"מ של  $G$  ביחס ל- $f(w)$ .

(ג) תארו אלג' שרץ בזמן  $O(|E| \alpha(|V|))$  המקבל בנוסף ל- $G$  ו- $w$  מספר ממשי  $r$  ועונה כמה קשתות ממשקל  $r$  יש בכל עפ"מ של  $G$ . (רמז: ניתן להשתמש בסעיף א' על ידי הגדרת פונ' מתאימה  $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

4. נתון מערך של מספרים ממשיים  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ומספר טבעי  $d \leq n$ .  $d$ -חלוקה של המערך הינה חלוקה שלו ל- $d$  מקטעים רציפים לא ריקים. נגדיר את המחיר של מקטע כסכום איבריו והמחיר של חלוקה כמחיר המקסימלי של מקטע שלה. תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא  $d$ -חלוקה עם מחיר מינימלי.

5. בקפיטריה יש  $n$  מגשי אוכל ריקים. נתון כי מגש  $i$  הוא באורך  $l_i$  וברוחב  $w_i$ . ניתן למקם את מגש  $i$  מעל מגש  $j$  אם  $l_i \leq l_j$  וגם  $w_i \leq w_j$ . על כל מגש ניתן להניח ישירות רק מגש אחד (כלומר אסור למגש להכיל שני מגשים ישירות עליו, זה לצד זה). ניתן לסובב מגש ב-90 מעלות על מנת שנוכל למקם אותו על מגש אחר, אך כל המגשים צריכים להיות מקבילים לצירים (כלומר, אסור לשים מגשים באלכסון, ולכן סיבוב שקול להחלפה בין האורך והרוחב). ניתן להניח כי  $\{l_i, w_j\}_{i=1}^n$  הם מספרים ממשיים חיוביים שונים. תארו אלגוריתם יעיל המחשב ערימה גדולה ככל האפשר של מגשים הניתנים למיקום אחד על השני.

6. נתונות  $m$  פונקציות  $f_1, f_2, \dots, f_m : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{Z}$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמוצא מספרים שלמים  $x_1, x_2, \dots, x_m$  שמקסמים את הסכום  $\sum_{i=1}^m f_i(x_i)$  תחת האילוץ  $\sum_{i=1}^m x_i \leq m$ .

---

<sup>1</sup>דהיינו,  $w'$  היא ההפעלה של  $f$  על  $w$ , כלומר: לכל  $e$ ,  $w'(e) = f(w(e))$ .

7. שאלה זו עוסקת ב-Edit Distance של מחרוזות. נתונות שתי מחרוזות  $X, Y$  באורכים  $m, n$  בהתאמה. נגדיר שלוש פעולות על המחרוזת  $X$ :

(א) פעולת  $Insert\ i, c$  - מכניסה את התו  $c$  למקום ה- $i$  ב- $X$

(ב) פעולת  $Delete\ i$  - מוחקת את התו במקום ה- $i$  ב- $X$

(ג) פעולת  $Swap\ i, c$  - מחליפה את התו במקום ה- $i$  ב- $X$  בתו  $c$

**סדרת עריכה** של  $X$  היא סדרה כלשהי של פעולות מסוג (א), (ב), (ג). **אורך** סדרת עריכה הוא מספר הפעולות שבה. **מרחק העריכה** (Edit Distance) של  $X$  מ- $Y$  הוא האורך המינימלי של סדרת עריכה שבסופה המחרוזת  $X$  זהה למחרוזת  $Y$ .

**ענו על הסעיפים הבאים:**

(א) עבור שתי מחרוזות קלט נתונות  $X, Y$ , תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן למציאת מרחק העריכה של  $X$  מ- $Y$ . (12 נק')

(ב) נניח שהפעולות האפשריות בסדרת עריכה היו רק פעולות (א), (ב). מה היה אז הקשר בין מרחק העריכה של  $X$  מ- $Y$  ל- $LCS$  של המחרוזות? (2 נק')

8. נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$ , ופונקציה משקל על הקשתות  $w : E \rightarrow R$ , וצומת  $x \in V$ . נניח שאין מעגלים שליליים בגרף. נתון שאין בגרף מסלול פשוט שמספר קשתותיו גדול מ- $k$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא עץ מסילות קלות ביותר מהצומת  $x$  (שימו לב -  $k$  אינו קבוע, אלא פרמטר שיכול להופיע בזמן הריצה, כמו  $|E|$  ו- $|V|$ ).

בהגשה ב-gradescope יש לסמן את כל העמודים שמתאימים לשאלה ולא רק את הראשון.  
אם לא עשיתם שאלה כיתבו במקומה 'לא עשיתי'.  
יש להקפיד על צילום ברור.

בהצלחה!