אלגוריתמים

תרגיל בית 2

להגשה עד יום ראשון,19 באפריל, שעה 22:00

<u>הנחיה כללית</u>: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

ההגשה דרך gradescope בלבד. 4-6 נקודות ניתנות על סריקה באיכות מספיקה והגשה לפי ההנחיות, ושארית הציון מורכבת מ-7 השאלות הטובות.

1. נתון גרף G לא מכוון **וקשיר**. סטודנט הציע את האלגוריתם הבא לבדיקה אם יש בו מעגל באורך אי-זוגי: (1) מריצים DFS שמתחיל את הסריקה מצומת כלשהו s ושומרים לכל צומת בעץ שנבנה במהלך הסריקה את הרמה שלו $L[v]$ בעץ ($L[s]=0$ ולכל $v \neq s$, $L[v]=L[\pi[v]]+1$). (מכיוון שהגרף קשיר יער ה-DFS יכיל עץ בודד). (2) עוברים על הקשתות ובודקים אם יש קשת $e=\{u,v\}$ כך ש-$L[u]+L[v]$ זוגי. במידה ויש כזו - מחזירים שיש מעגל באורך אי-זוגי, ואחרת מחזירים שאין. האם האלגוריתם נכון? הוכיחו או הפריכו.

2. נתון גרף $G=(V,E)$ ויהי k קבוע. תארו אלגוריתם אשר מוצא את קבוצת הקודקודים $S \subseteq V$, כאשר מכל קודקוד $v \in S$ קיים מסלול (לא בהכרח פשוט) לבדיוק k קודקודים אחרים. זאת אומרת, קבוצת הקודקודים שמכל אחד ניתן להגיע לבדיוק k קודקודים אחרים.

   (א) עבור G מכוון, על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V|)$ (תתכן תלות ב-k).

   (ב) עבור G לא מכוון, על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V|+|E|)$ (הפעם ללא תלות ב-k).

3. נתון גרף לא מכוון וקשיר G וצומת v. ידוע שעץ ה-BFS מ-v ועץ ה-DFS מ-v זהים. הוכיחו ש-G הוא עץ.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

   (א) קשת בגרף לא מכוון נקראת גשר אם הסרתה מגדילה את מספר רכיבי הקשירות. תארו אלגוריתם יעיל למציאת כל הגשרים בגרף קשיר נתון. על האלגוריתם להסתמך על האלגוריתם שמחשב ערכי low **שנלמד בתרגול**.

   (ב) תארו אלגוריתם יעיל שמוצא בגרף לא מכוון את כל הקשתות שמשתתפות במעגל פשוט.

5. מסלול המילטון בגרף הוא מסלול פשוט העובר בדיוק פעם אחת בכל צומת בגרף.

   (א) נתון גרף מכוון אציקלי G. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן הבודק אם יש בו מסלול המילטון, והוכיחו נכונות במדוייק.הוכיחו שאם $v_1 \to v_2 \to ... \to v_n$ מסלול המילטון בגרף אז $v_1, v_2, \ldots, v_n$ הוא סדר מיון טופולוגי יחיד של צמתי G.

   (ב) האם הטענה הפוכה נכונה? (אם סדר מיון טופולוגי הוא יחיד אז הוא מהווה מסלול המילטון) הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית.

6. נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k. תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת-קבוצה $U \subseteq V$ בגודל k אשר מקיימת את התכונות הבאות:

   (א) לכל צומת $v \in V \setminus U$ קיים צומת $u \in U$ כך שישנו מסלול מכוון מ- v ל-u.

(ב) לא קיים מסלול מכוון בין שני צמתים שונים של U.

אם לא קיימת תת־קבוצה מתאימה, על האלגוריתם להתריע על כך.

7. תארו אלג' יעיל ככל הניתן הפותר את הבעיה הבאה:
עבור וקטור $\bar{X} = (X_1, ..., X_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ של שלמים חיוביים נגדיר את ה**משקל** של $\bar{X}$ להיות $|\{X_i \mid 1 \leq i \leq n\}|$ (כלומר מספר הרכיבים השונים של הוקטור).
נתון שלם חיובי n וכן m אי־שוויונות מהצורה $X_i \leq X_j$ עבור $1 \leq i, j \leq n$. רוצים למצוא $\bar{X} = (X_1, ..., X_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ שמקיים את כל אי־השוויונות, ממשקל מקסימלי.

8. נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \to R$ ונתונה קשת e.

(א) תארו אלגוריתם ליניארי הבודק האם קיים עפ"מ המכיל את הקשת e.

(ב) תארו אלגוריתם ליניארי הבודק האם כל עפ"מ מכיל את הקשת e.

9. (**שאלת בונוס**) השאלה הבאה היא על אלגוריתם מציאת הרק"חים של **Tarjan** הנלמד בכיתה. ענו על הסעיפים הבאים.

(א) הוכיחו את הטענה הבאה. כאשר מבצעים backtrack מקודקוד v במהלך הרצת האלגוריתם, אם ישנה קשת היוצאת מתת העץ של v אז: או שמתקיים $low(v) = v.d$, או שעבור צומת כלשהו w, $low(v) = w.d$, כאשר

i. w אינו בתת העץ של v וגם־

ii. w נמצא במחסנית וגם־

iii. ישנה קשת אחורית או חוצה היוצאת מצאצא של v ומגיעה ל־w.

(ב) נניח שמשנים את שורה 11 של האלגוריתם (הנמצא במצגת של ההרצאה) באופן הבא: במקום $low(u) = min\{v.d, low(u)\}$ להיות $low(u) = min\{low(v), low(u)\}$. במילים: כאשר רואים קשת אחורה או חוצה היוצאת מ־u ונכנסת ל־v (כאשר v נמצא במחסנית) נשנה את $low(u)$ להיות $low(v)$ אם v קטן יותר. הראו דוגמא (פשוטה ככל האפשר) שמדגימה שכעת הטענה מהסעיף א' לא נכונה בהכרח.

(ג) האם נכונות האלגוריתם למציאת רק"חים נשמרת לאחר השינוי בסעיף ב'? הוכיחו או הפריכו.

בהגשה ב־gradescope יש לסמן את כל העמודים שמתאימים לשאלה ולא רק את הראשון.
יש להקפיד על צילום ברור.

בהצלחה!