

אלגוריתמים

תרגיל בית 2

להגשה עד יום חמישי, 27 באפריל, שעה 12:00

הנחיה כללית: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k . תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת-קבוצה $U \subseteq V$ בגודל k אשר מקיימת את התכונות הבאות:

(א) לכל צומת $v \in V \setminus U$ קיים צומת $u \in U$ כך שישנו מסלול מכוון מ- v ל- u .

(ב) לא קיים מסלול מכוון בין שני צמתים שונים של U .

אם לא קיימת תת-קבוצה מתאימה, על האלגוריתם להתריע על כך.

2. נתון גרף $G = (V, E)$ והי k קבוע. תארו אלגוריתם אשר מוצא את קבוצת הקודקודים $S \subseteq V$, כאשר מכל קודקוד $v \in S$ קיים מסלול (לא בהכרח פשוט) לבדיוק k קודקודים אחרים. זאת אומרת, קבוצת הקודקודים שמכל אחד ניתן להגיע לבדיוק k קודקודים אחרים.

(א) עבור G מכוון, על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V| + |E|)$.

(ב) עבור G לא מכוון, על האלגוריתם לרוץ גם כן בזמן $O(|V| + |E|)$, אך ללא תלות ב- k .

3. הראו כיצד ניתן להרחיב את אלגוריתם DFS כך שלכל צומת v ישמור ב- $root(v)$ את שורש עץ ה- DFS ש- v שייך אליו.

4. נתון גרף מכוון G ומספור של הצמתים $V = \{1, \dots, n\}$. נסמן ב- $R(v)$ את קבוצת הצמתים הנגישים מ- v (ע"י מסלול מכוון) ב- G . תארו אלגוריתם יעיל המחשב לכל צומת $v \in V$ את הצומת $\rho(v) = \min R(v)$.

5. קשת בגרף לא מכוון נקראת גשר אם הסרתה מגדילה את מספר רכיבי הקשירות. תארו אלגוריתם יעיל למציאת כל הגשרים בגרף קשיר נתון. על האלגוריתם להסתמך על האלגוריתם low שנלמד בתרגול.

6. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) לכל גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ (ללא משקלים) ולכל עץ פורש T של G יש צומת $s \in V$ כך שאפשר לקבל את T כעץ DFS עם שורש s .

(ב) לכל גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ (ללא משקלים) ולכל עץ פורש T של G עם שורש $s \in V$ שמהווה עץ מסלולים קצרים ביותר מ- s , אפשר לקבל את T כעץ BFS עם שורש s .

7. מסלול המילטון בגרף הוא מסלול פשוט העובר בדיוק פעם אחת בכל צומת בגרף.

(א) נתון גרף מכוון אציקלי G . הוכיחו שאם $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ מסלול המילטון בגרף אז v_1, v_2, \dots, v_n הוא סדר מיון טופולוגי יחיד של צמתי G .

(ב) האם הטענה הפוכה נכונה? (אם סדר מיון טופולוגי הוא יחיד אז הוא מהווה מסלול המילטון) הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

8. נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R$ ונתונה קשת e .

(א) תארו אלגוריתם ליניארי הבודק האם קיים עפ"מ המכיל את הקשת e .

(ב) תארו אלגוריתם ליניארי הבודק אם כל עפ"מ מכיל את הקשת e .