

אלגוריתמים

תרגיל בית 1

להגשה עד יום חמישי, 30 במרץ, שעה 12:00

הנחיה כללית: בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה. ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה.

1. נתון גרף לא מכוון וקשיר בו יש $2k$ צמתים מדרגה אי-זוגית (ומספר לא ידוע של צמתים מדרגה זוגית). הוכיחו שניתן לכסות את כל קשתותיו ע"י k מסלולים, לאו דווקא פשוטים, זרים בקשתות.

2. נתונה קבוצה של אבני דומינו (כל אבן מכילה זוג מספרים בין 1 ל-6). מותר לשים את האבן (x, y) מימין לאבן (z, w) אם $w = x$. תארו אלגוריתם יעיל המחזיר סידור תקני שלהן בשורה או מצהיר שאין כזה. הניחו שניתן גם לסובב את האבנים ב-180 מעלות.

3. השאלה מתחלקת לשני סעיפים:

(א) מצאו תנאי הכרחי ומספיק להמצאות מעגל אוילר בגרף מכוון (והוכיחו נכונות!).
(ב) נתונים קבוצה של איים וקבוצה של גשרים בין זוגות של איים. בנוסף, ידוע שקיים מסלול בין כל זוג איים. הוכיחו שתמיד קיים מסלול לטיול אשר יוצא מאחד האיים ועובר בכל גשר בדיוק פעמיים: פעם אחת בכל כיוון. בנוסף, תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול כזה.

4. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$. נאמר שצומת v הוא בדרך מצומת x לצומת y אם יש מסלול $x \rightsquigarrow y$ (לאו דווקא פשוט) כך ש- v צומת פנימי במסלול זה. תארו אלגוריתם יעיל שבהנתן G ושלושה צמתים שונים $x, y, z \in V$, מחשב את קבוצת הצמתים $U \subseteq V$ שכל אחד מהם נמצא בדרך מ- x ל- y אבל לא בדרך מ- y ל- z .

5. גרף לא מכוון נקרא כמעט דו-צדדי אם הוא דו-צדדי או שקיימת בו קשת שהסרתה תהפוך אותו לדו-צדדי. להלן הצעה לאלגוריתם ליניארי הבודק אם גרף לא מכוון וקשיר הוא כמעט דו-צדדי:

- בוחרים צומת כלשהו ומריצים ממנו BFS .
- נספור כמה קשתות (u, v) מקיימות $d(s, u) = d(s, v)$ (כלומר הצמתים u, v שווי רמה בעץ ה- BFS);

- אם מספר זה הוא 0 או 1, הגרף כמעט דו צדדי, ומחזירים True
- אחרת (קרי, מספר זה הוא לפחות 2), הגרף אינו כמעט דו-צדדי ומחזירים False

הביאו דוגמא עבודה האלגוריתם נכשל והסבירו מדוע.

6. נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$, וזוג צמתים $s, t \in V$. כל קשת בגרף צבועה באדום או בכחול.

(א) תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול בין s לבין t אשר עובר דרך מספר מינימאלי של קשתות אדומות (לא משנה מהו מספר הקשתות הכחולות במסלול).
(ב) תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא, מבין המסלולים בין s לבין t אשר עוברים דרך מספר מינימאלי של קשתות אדומות, מסלול עם מספר מינימאלי של קשתות כחולות.

7. תארו אלגוריתם יעיל המוצא האם קיים מעגל . . .

(א) . . . בגרף לא מכוון.

(ב) . . . בגרף מכוון.

תשובות בהן הסיבוכיות של שני הסעיפים זהה לא יקבלו את כל הנקודות.

8. נתון גרף $G = (V, E)$ קשיר ולא מכוון עם קודקודים ממוספרים מ-1 ל- $|V|$. בהרצת כל אלגוריתם אשר יכול לבחור בין 2 קודקודים בשלב כלשהו, האלגוריתם תמיד יבחר בקודקוד עם המספר הקטן ביותר. הוכיחו או הפריכו: BFS ו- DFS שמורצים על הקודקוד עם המספר 1 תמיד יפלטו את אותו העץ.