אלגוריתמים תרגיל בית 1 פתרונות

שאלה 1.

נחלק את 2k הצמתים בדרגה האי זוגית, לk זוגות. לכל שני צמתים בזוג נוסיף קשת ביניהם. כעת כל הצמתים בדרגה זוגית ובנוסף הגרף קשיר (כי רק הוספנו קשתות) לכן קיים מעגל אויילר. נמצא מעגל אויילר שיסתיים בקשת חדשה (כפי שעשינו בתרגול). נסיר את הקשתות החדשות מהמעגל נקבל k מסלולים אשר בכל קשת עוברים פעם אחת.

שאלה 2.

נבנה גרף בעל שישה צמתים 1,2,3,4,5,6, לכל אבן דומינו (x,y) נוסיף קשת בין הצמתים x ו y. כעת נחשב מסלול אוילר בגרף זה והוא יהווה סידור של האבנים.

שאלה 3.

א. בגרף מכוון קיים מעגל אויילר, אם קיים מסלול מכל צומת לכל צומת (קשיר בחוזקה) ובכל צומת דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה.

ב. נבנה גרף מכוון, כל אי יהיה צומת בגרף, לכל גשר בין שני איים נחבר את שני הצמתים (u,v) המתאימים בשתי הקשתות מכוונות <u,v> ו <v,u>. קל לראות שבכל צומת דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה וכן הגרף קשיר בחוזקה לכן קיים מעגל אויילר.

שאלה 4 (פתרון מלא).

ראשית נראה איך מוצאים את כל הצמתים שבדרך מx לy. עבור הגרף G(V,E) נגדיר G'(V,E'), ב G' אותם צמתים כמו ב G וכל קשת ב'E היא קשת שקיימת בהיפוך בE.

ז"א $<u,v> \in E \leftrightarrow <v,u> \in E'$.

נריץ BFS מ x בG ונמצא את הרכיב הנגיש מx, $A(x) \subseteq V$. נריץ BFS מ y ב'G. נמצא את הרכיב הנגיש של y ב'G A'(Y).

משפט: צומת u הוא ב'דרך' מ x לy אמ"מ $u \in A(x) \cap A'(y)$.

הוכחה: קיים מסלול מu לy ב G אמ"מ ב'G קיים מסלול מy לu.כעת נוכיח את המשפט. <u>כיוון ראשון</u>: לכל צומת uב'דרך' יש מסלול שעובר דרכו, ז"א קיים מסלול מ x לu ומסלול בין u לy. לכן u יהיה גם בA(x) וגם A'(y). <u>כיוון שני</u>: אם צומת u ב A(x) אזי קיים מסלול מ x אליו, אם צומת זה גם ב A'(y) אז קיים מסלול בין u לy. לכן קיים מסלול בין x ל y שעובר דרך u (איחוד המסלולים).

באופן דומה נחשב A(y), ו A'(z). קבוצת הצמתים שבדרך מx ל y ולא בדרך מy לz היא-
$\left(A(x) \cap A'(y)\right) \cap \left(V / \left(A(y) \cap A'(z)\right)\right)$

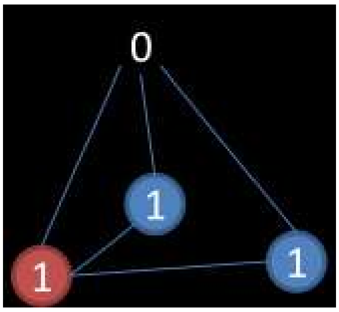
סיבוכיות –

הכנת הגרף, O(|E|), הרצת BFS מספר קבוע של פעמים (4) O(|V|+|E|).

החיתוך יכול להיות מבוצע ב O(V) ע"י סימון הצמתים בכל קבוצה.

סה"כ $O(|V|+|E|)$.

שאלה 5.



ישנם שתי קשתות המקיימות את התנאי, אך הסרת הקשת מהשחור לאדום תהפוך את הגרף לדו"צ.

שאלה 6 (פתרון מלא).

נסמן ב $r(u)$ את המספר המינימאלי של קשתות אדומות בכל מסלול בין s ל u.

כעת נראה איך מחשבים את $r(u)$ - בהסרת הקשתות האדומות נקבל גרף 'G עם מספר רכיבי קשירות, לשני צמתים באותו רכיב קשירות יהיה את אותו $r(u)$. לכן נותר לחשב את $r(u)$ של הרכיב בגרף הרכיבים, גרף שבו כל צומת מייצג רכיב קשירות ב'G וקיימת קשת בין שני צמתים בגרף הרכיבים אם קיימת קשת (אדומה) בין שני צמתים ברכיבי הקשירות המתאימים. נחשב את $r(u)$ של רכיב ע"י BFS על גרף הרכיבים.

קיים מסלול בין s ל u אשר משתמש בk קשתות אדומות, אמ"מ קיים מסלול באורך k בין הרכיב קשירות של לרכיב קשירות של u. לכן $r(u)$ של כל צומת הינו המרחק הקצר ביותר של הרכיב של u בגרף הרכיבים (התוצאה של ה BFS).

האלוגריתם:

- מציאת מסלול בגרף הרכיבים.
- מציאת מסלול בתוך רכיב הקשירות

זמן ריצה –

- חישוב גרף העל – (הרצת BFS על 'G) $O(|V|+|E|)$.
- הרצת BFS על גרף העל $O(|V|+|E|)$
- איחוד המסלול $O(|V|+|E|)$ (בעזרת עצי הBFS שקיבלנו בשלב הקודם).

סה"כ זמן ליניארי.

<u>סעיף ב:</u> כעת נראה איך מוצאים את המסלול הקצר ביותר מבין כל המסלולים בעל מספר מינימאלי של קשתות אדומות. קל לראות שלמסלול כזה יהיו בדיוק $d(t)$ קשתות אדומות.

האלגוריתם: נחשב את $d(u)$ לכל צומת u כמו בסעיף א'. נבנה גרף **מכוון** $G''=(V,E'')$ כאשר הקשתות ב E'' הינם: לכל קשת (u,v) כחולה ב E נוסיף ב E'' שתי קשתות $\langle u,v\rangle$ ו $\langle v,u\rangle$ וכל הקשתות האדומות (v,u) המקיימות $d(u)=d(v)+1$ נוסיף קשת (אחת) $\langle v,u\rangle$

נחשב בעזרת BFS את המסלול הקצר ביותר בין s ל t ב "G ונחזיר אותו.

נכונות: נראה שכל מסלול p שמשתמש ב(d(t קשתות אדומות קיים ב ''G. נניח בשלילה שלא ז"א קיימים צמתים u,v במסלול עם קשת בגרף המקורי אך לא ב''G. קשת זו חייבת להיות אדומה (את כל הכחולות השארנו) וגם d(u)≠ d(v)+1 בגלל שיש קשת מv לu אז d(u)≤d(v)+1, קיבלנו d(u)≤d(v), ז"א יש מסלול מs ל u שמשתמש בלכל היותר (d(v קשתות, נחבר אותו עם המשך המסלול ב מ uל t. וקיבלנו מסלול שמגיע ל s לt בלכל היותר d(t)-1 קשתות אדומות, סתירה!

כיוון שני: כל מסלול בין s ל t ב''G מכיל לכל היותר (d(t קשתות אדומות – אם נסתכל על מסלול p וההתקדמות של (d(v לפי המסלול. d(s)=0 ולאורך המסלול (d(v נשאר אם עברנו בקשת כחולה, או עולה באחד כאשר עברנו על קשת אדומה לכן כשנגיע לt נעבור על בדיוק (d(t קשתות אדומות.

סיבוכיות – מעבר על הקשתות (|O(|E, BFS **-** (|O(|V|+|E.

שאלה 7.

א. אם מספר הקשתות גדול שווה ל|V| החזר שקיים מעגל, אחרת הרץ BFS, אם קיים רכיב קשירות בעל k צמתים ויותר מ1-k קשתות החזר שקיים מעגל אחרת החזר שלא קיים סיבוכיות (|O(|V,

ב. הרץ DFS, בדוק האם קיימת 'קשת אחורית' סיבוכיות (|O(|V|+|E

שאלה 8.