

מבחן מועד א' באלגוריתמים, סמסטר א' תשע"ו (2016)

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' רון שמיר, פרופ' מיכה שריר

מתרגלים: אילן כהן, אופיר פרידלר

16.2.2016

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: דף פוליו מודפס (דו צדדי) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.
5. תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
6. על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
7. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
8. ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
9. התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
10. בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלו קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

שאלה 1

ב"בעיית הקטעים התואמים" הקלט הוא וקטור $a_1 a_2 \dots a_n \in \{0,1\}^n$, הפלט הוא קבוצה חוקית של קטעים תואמים:

1. קטע $\langle i, j \rangle$ (כלומר התת-וקטור $a_i a_{i+1} \dots a_j$) הוא תואם אם $i < j$ והספרה הראשונה והספרה האחרונה שלו שוות, כלומר $a_i = a_j$.

2. קבוצת קטעים היא חוקית אם כל קצות הקטעים שונים זה מזה, וכל זוג קטעים הוא זר ממש או מוכל ממש:

זוג הקטעים $\langle i, j \rangle$ ו- $\langle k, m \rangle$ הוא זר ממש אם $m < i$ או $j < k$.
זוג הקטעים מוכל ממש אם $i < k < m < j$ או $k < i < j < m$.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב קבוצה חוקית של קטעים תואמים בגודל מקסימלי.

סיבוכיות:

תעודת זהות: _____

מספר מהברת: _____

שאלה 2

נתון גרף דו צדדי לא מכוון $G = (U, W, U \times W)$ כאשר $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ (כלומר מספר הצמתים בכל צד הוא n ויש קשת בין כל שני צמתים (u_i, w_j)). בנוסף משקל כל קשת $u_i - w_j$ הוא $i + j$.

1. כמה עצים פורשים מינימליים יש ל- G , ומה הוא משקלם?
2. הנח ש $f: \{1 \dots n\} \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה עולה ממש, וכעת משקל כל קשת $u_i - w_j$ הוא $f(i) + f(j)$. האם מספר העצים פורשים מינימליים:

a. עולה

b. יורד

c. לא משתנה

d. צריך לדעת יותר פרטים על f כדי להכריע.

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

שאלה 3

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו כי בגרף אין מעגל שלילי אם ורק אם קיימת פונקציה $\Delta: V \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $\Delta(v) \leq \Delta(u) + w(u, v)$.

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

שאלה 4

הרשת G בנויה מהצמתים s, t ומשלוש קבוצות זרות ולא ריקות של צמתים V_1, V_2, V_3 , כך שהקשתות ברשת הן:

כלומר – מצומת המקור s יוצאת קשת אחת אל כל צומת ב V_1 , מכל צומת ב V_1 יוצאת קשת אל כל צומת ב V_2 , מכל צומת ב V_2 יוצאת קשת אל כל צומת ב V_3 , ומכל צומת ב V_3 יוצאת קשת אל צומת היעד t .

הקיבול על כל קשת המחוברת ל s או ל t הוא ∞ (כלומר $c(s \rightarrow u) = c(v \rightarrow t) = \infty$) ועבור כל קשת אחרת הקיבול הוא 1.

- (א) מה הערך המקסימלי של זרימה ברשת? הוכיחו, ובנו פונקציית זרימה $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ המשיגה ערך זה.
(ב) הניחו כעת שכל הקיבולים הם 1 (כלומר גם הקיבולים של הקשתות המחוברות ל s, t), וענו על סעיף (א) תחת הנחה זו.
(ג) מה זמן הריצה של האלגוריתם של דיניץ בסעיף (א) ומהו בסעיף (ב)?

בפתרונות יש להשתמש בפרמטרים $n_1 = |V_1|$, $n_2 = |V_2|$, $n_3 = |V_3|$.

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

שאלה 5

בהינתן גרף פשוט ומכוון $G = (V, E)$ וצומת $s \in V$, הקבוצה $U \subseteq V$ מוגדרת להיות קבוצת כל הצמתים אשר יש מסלול לא פשוט מ s אליהם. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב U .

סיבוכיות:

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

מסגרת חירום לשאלה מספר _____

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying most of the page. It is intended for the student to provide answers or show work.

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

מסגרת חירום לשאלה מספר _____

A large empty rectangular box with a thin black border, occupying most of the page. It is intended for the student to write their answers to the questions.