



אלגוריתמים (0368-2160)  
סמסטר א' התשפ"ב

## מבחן – מועד ב'

תאריך: 16.2.2022, ט"ו באדר א' התשפ"ב

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ', ג'אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות.
- המבחן הוא בחומר סגור, ללא מחשבון.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר (2 עמודים).
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל שאלה בה אתם מציגים הוכחה, ניתן להסתמך על טענות שראינו הסמסטר בשיעורים, בתירגולים ובשיעורי הבית, אם מצטטים אותן במדויק.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות וכלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

**בהצלחה!**

**שאלה 1**

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  ונתונים צמתים  $s, t \in V$ . נגדיר את המגוון של הילוך להיות מספר הצמתים השונים בו (קרי: גם אם עוברים דרך צומת מספר פעמים, הוא נספר במגוון רק פעם אחת). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב  $k \in \mathbb{N}$  מקסימלי כך שקיים הילוך  $p : s \rightsquigarrow t$  עם מגוון  $k$ . ניתן להניח ש- $t$  נגיש מ- $s$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 2

נתון גרף לא מכוון וקשיר  $G = (V, E)$  על  $n = |V|$  צמתים ו- $|E| = 2022n$  קשתות, ונתונה פונקציית משקל  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל קשת  $e \in E$  מתקיים  $0 \leq w(e) \leq n$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שבודק האם קיים ל- $G$  עפ"מ שהוא אינטגרלי, כאשר עץ פורש של  $G$  נקרא אינטגרלי אם משקלי כל קשתותיו שלמים. הערה: אלגוריתם שרץ בזמן  $\Theta(n \log n)$  יקבל ניקוד סמלי בלבד.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**שאלה 3**

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  ונתונה צביעה של קשתותיו ב-5 צבעים: כחול, צהוב, סגול, ירוק, ואדום. נאמר שמעגל (פשוט)  $C$  הוא מעגל מרים רות (ממ"ר) אם מתקיים

$$3 \cdot \#_{red}(C) > 4 \cdot \#_{blue}(C) + 5 \cdot \#_{green}(C) + 6 \cdot \#_{yellow}(C)$$

כאשר  $\#_k(C)$  הוא מספר הקשתות מצבע  $k$  על  $C$  (מספר הקשתות הסגולות לא משפיע). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע אם כל המעגלים הפשוטים בגרף הם ממ"ר. הערה: זו אותה הגדרה של ממ"ר כמו במועד א', אבל לאלגוריתם כעת יש מטרה אחרת.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 4

נתונה תכנית לינארית  $P$  בצורה סטנדרטית עם  $n$  משתנים ו- $m = n$  אילוצים:

$$P : \begin{cases} \text{maximize} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

ידוע של- $P$  יש פתרון אופטימלי יחיד  $x$ , וידוע שמתקיים לכל  $1 \leq j \leq n$ .  
 תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר (ובפרט פולינומי) לחישוב  $x$  הנ"ל בהנתן  $P$ .  
הערה: אפשר להניח ששורות המטריצה  $A$  הן בלתי תלויות לינארית ואין צורך להוכיח זאת, אך תשובה שכוללת הוכחה מלאה של עובדה זו תזכה לבונוס קטן.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 5

תהי רשת זרימה  $G = (V, E)$  מצומת  $s \in V$  לצומת  $t \in V$  עם קיבולים חיוביים  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , ונתונה קשת  $e = (u, v) \in E$ . נגדיר את קבוצת החתכים (המכוונים) ברשת ש- $e$  חוצה אותם להיות  $\mathcal{C}_e = \{(S, T) : s, u \in S \wedge v, t \in T\}$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא מבין החתכים ב- $\mathcal{C}_e$  חתך שקיבולו מינימלי.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: \_\_\_\_\_ ת.ז.: \_\_\_\_\_

מסגרת חירום לשאלה מספר \_\_\_\_\_:

מס' מחברת: \_\_\_\_\_ ת.ז.: \_\_\_\_\_

מסגרת חירום לשאלה מספר \_\_\_\_\_: