

## מבחן – מועד א'

תאריך: 21.1.2022, י"ט בשבט התשפ"ב

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ', ג'אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות. לא יינתן זמן נוסף להתארגנות (הדפסה, סריקה, וכו').
- המבחן הוא בחומר סגור, ללא מחשבון.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר (2 עמודים).
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה/בעמוד נפרד. יש להשתדל לקצר בהסברים.
- בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- יש לסרוק ל-PDF יחיד את 8 עמודי הבחינה (ללא הנספח), כולל עמוד זה, לפי הסדר. את מסגרות החירום לא חובה לסרוק.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל שאלה בה אתם מציגים הוכחה, ניתן להסתמך על טענות שראינו הסמסטר בשיעורים, בתירגולים ובשיעורי הבית, אם מצטטים אותן במדויק.

בהצלחה!

## שאלה 1

יהי גרף מכוון  $G = (V, E)$ . בצומת  $s \in V$  עומד ג'אד ובצומת  $t \in V$  עומד טל, והם מעוניינים להיפגש בהקדם בצומת כלשהו בגרף (לא חשוב איזה). עבור כל קשת מכוונת  $(u, v) \in E$ , מי שנמצא בצומת  $u$  יכול להגיע דרכה לצומת  $v$ , כאשר ההליכה על  $(u, v)$  לוקחת לטל דקה אחת ולג'אד שתי דקות. אם הם בחרו להיפגש בצומת מסוים, אז זה שהגיע לשם ראשון ימתין לבואו של השני. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב צומת מפגש  $r \in V$  עבורו פגישתם של ג'אד וטל בצומת  $r$  תקרה כמה שיותר מהר (ניתן להניח שקיימת נקודת מפגש אפשרית ושהם מזדרזים).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 2

להלן אלגוריתם לחישוב רק"חים בגרף מכוון  $G = (V, E)$  בדומה לאלגוריתם Kosaraju-Sharir. ראשית נריץ DFS על  $G$  לחישוב זמני סיום  $f[v]$  לכל  $v \in V$ ; לאחר מכן נגדיר גרף מכוון  $H$  שצמתיו הם  $V$  בתוספת צומת חדש  $s$ , וקשתותיו הן  $E^T$  (קשתות  $G^T$ ) בתוספת קשתות מ- $s$  לכל צומת אחר  $v \in V$ . נקפיד להוסיף את צמתי  $V$  לרשימת השכנות  $\text{Adj}[s]$  לפי סדר יורד של ערכי  $f$  שחושבו בשלב הראשון. לבסוף, נריץ על  $H$  את אלגוריתם DFS, כשמתחילים מהצומת  $s$ , לחישוב יער DFS  $H_\pi$ ; לכל בן  $u$  של  $s$  ביער  $H_\pi$ , נחזיר את תת-הגרף של  $G$  שמושרה ע"י צמתי תת-העץ של  $u$  ב- $H_\pi$  כרק"ח נפרד.

- הוכיחו או הפריכו: האלגוריתם נכון, כלומר אכן מחזיר את רכיבי הקשירות החזקה של  $G$ .
  - האם התשובה תשתנה אם בשלב השני מריצים BFS מ- $s$  במקום DFS?
- הערה: שימו לב לסעיף האחרון בהוראות שבעמוד הראשון.

הוכחה/דוגמה נגדית:

## שאלה 3

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  ונתונה צביעה של קשתותיו ב-5 צבעים: כחול, צהוב, סגול, ירוק, ואדום. נאמר שמעגל (פשוט)  $C$  הוא מעגל מרים רות (ממ"ר) אם מתקיים

$$3 \cdot \#_{red}(C) > 4 \cdot \#_{blue}(C) + 5 \cdot \#_{green}(C) + 6 \cdot \#_{yellow}(C)$$

כאשר  $\#_k(C)$  הוא מספר הקשתות מצבע  $k$  על  $C$  (מספר הקשתות הסגולות לא משפיע). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע אם קיים ממ"ר בגרף.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 4

תזכורת: נורמת  $\ell_1$  של וקטור  $x \in \mathbb{R}^n$  מוגדרת להיות המספר  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ . נתונה תכנית לינארית  $P$  בצורה סטנדרטית: (ניתן להניח שהיא פיזיבילית וחסומה)

$$P : \begin{cases} \text{maximize} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

כתבו תכנית לינארית  $P'$  (התלויה ב- $P$ ) שמוצאת את הערך

$$\min \{ \|x\|_1 : x \text{ is an optimal solution for } P \}$$

תכנית והסבר:

## שאלה 5

נסמן ב- $\{0, 1\}^{2n \times n}$  את קבוצת המטריצות עם  $2n$  שורות ו- $n$  עמודות, כך שבכל תא רשום 0 או 1. נתונה מטריצה  $A \in \{0, 1\}^{2n \times n}$  כך שסכום כל שורה שלה הוא  $k \cdot 2022$  וסכום כל עמודה שלה הוא  $2k \cdot 2022$ .

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב מטריצה  $B \in \{0, 1\}^{2n \times n}$  כך שסכום כל שורה שלה הוא  $k$ , סכום כל עמודה שלה הוא  $2k$ , ומתקיים  $b_{ij} \leq a_{ij}$  לכל  $1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n$ . יש להביע את זמן הריצה במונחי  $n, k$  (ובפרט אין להניח הנחות כמו  $k$  קבוע או  $k = \Theta(n)$ ).  
הערה: אפשר להניח ש- $B$  כזו קיימת ואין צורך להוכיח זאת, אך תשובה שכוללת הוכחה מלאה של קיום  $B$  כזו לכל  $A$  מתאימה תזכה לבונוס קטן.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מסגרת חירום לשאלה מספר \_\_\_\_\_:

מסגרת חירום לשאלה מספר \_\_\_\_\_: