



אלגוריתמים (0368-2160)
סמסטר א' התשפ"א

מבחן — מועד ב'

תאריך: 1.3.2021, י"ז באדר התשפ"א

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ', ג'אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות. לא יינתן זמן נוסף להתארגנות (הדפסה, סריקה, וכו')
- המבחן הוא בחומר סגור, ללא מחשבון.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר (2 עמודים).
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה/בעמוד נפרד. יש להשתדל לקצר בהסברים.
- בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- יש לסרוק ל-PDF יחיד את 8 עמודי הבחינה (ללא הנספח), כולל עמוד זה, לפי הסדר. את מסגרות החירום לא חובה לסרוק.
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל שאלה בה אתם מציגים הוכחה, ניתן להסתמך על טענות שראינו הסמסטר בשיעורים, בתירגולים ובשיעורי הבית, אם מצטטים אותן במדויק.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

שאלה 1

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, ונתונים צמתים $s, t \in V$. פונקציה $\ell : V \rightarrow \mathbb{Z}$ נקראת תיוג של G אם $\ell(u) \leq \ell(v) + 1$ מתקיים $(u, v) \in E$ ולכל קשת $\ell(t) = 0, \ell(s) = |V|$.
 תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב תיוג ℓ שסכומו $L = \sum_{v \in V} \ell(v)$ מינימלי, כאשר ידוע שכל צומת $v \in V$ נגיש בדיוק מצומת אחד מבין s, t .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$. תארו אלגוריתם לינארי שקובע האם יש ב- G מעגל (מכוון, לאו דווקא פשוט) מאורך אי-זוגי.

רמז: חישבו ראשית על אלגוריתם שקובע האם יש ב- G מעגל (מכוון) אי-זוגי שעובר בצומת נתון $v \in V$.

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

לא רבים יודעים, אבל ליוסף קרוסקל היה אח גדול בשם בנימין קרוסקל, וגם בנימין פיתח אלגוריתם למציאת עפ"מ בגרף קשיר לא מכוון וממושקל. בניגוד לאחיו הצעיר, בנימין ממייך את קשתות הגרף לפי סדר משקל יורד; כעת הוא עובר על הקשתות לפי סדר זה ומוחק כל קשת שהסרתה לא תגרום לניתוק הגרף.

הוכיחו או הפריכו: האלגוריתם של בנימין קרוסקל נכון, כלומר מובטח שהגרף המוחזר הוא אכן עפ"מ.

הוכחה/דוגמה נגדית:

שאלה 4

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל חיובית $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. כל צומת $v \in V$ מתאר עיר, וכל קשת $(u, v) \in E$ מתארת כביש (חד-סטרי) מעיר u לעיר v באורך $w(u, v)$ ק"מ (ניתן להזניח את מרחקי הנסיעה בתוך הערים). כמו כן, נתונה תת-קבוצה $S \subset V$ בגודל $|S| = \sqrt{|V|}$ של ערים שבהן יש תחנת טעינה. מכונית חשמלית יוצאת מעיר $s \in V$ ורוצה להגיע לעיר $t \in V$ (זו מכונית אוטונומית מדגם מתקדם, ויש לה רצון משלה). סוללת המכונית מספיקה לנסיעה של 100 ק"מ, ובתחילת הנסיעה היא טעונה לחלוטין.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב מסלול $s \sim t$ קצר ביותר כך שהמכונית לא תיתקע בדרך עם סוללה ריקה, או מודיע שלא ניתן למצוא כזה.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

גרף לא מכוון $G = (V, E)$ נקרא משובח אם קיימת חלוקה $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6$ של צמתיו לשש קבוצות זרות כך שלכל קשת $\{u, v\} \in E$, האינדקסים i, j עבורם $u \in V_i, v \in V_j$ מקיימים $i \equiv j \pm 1 \pmod{6}$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן לחישוב זיווג מגודל מקסימלי בגרף משובח.

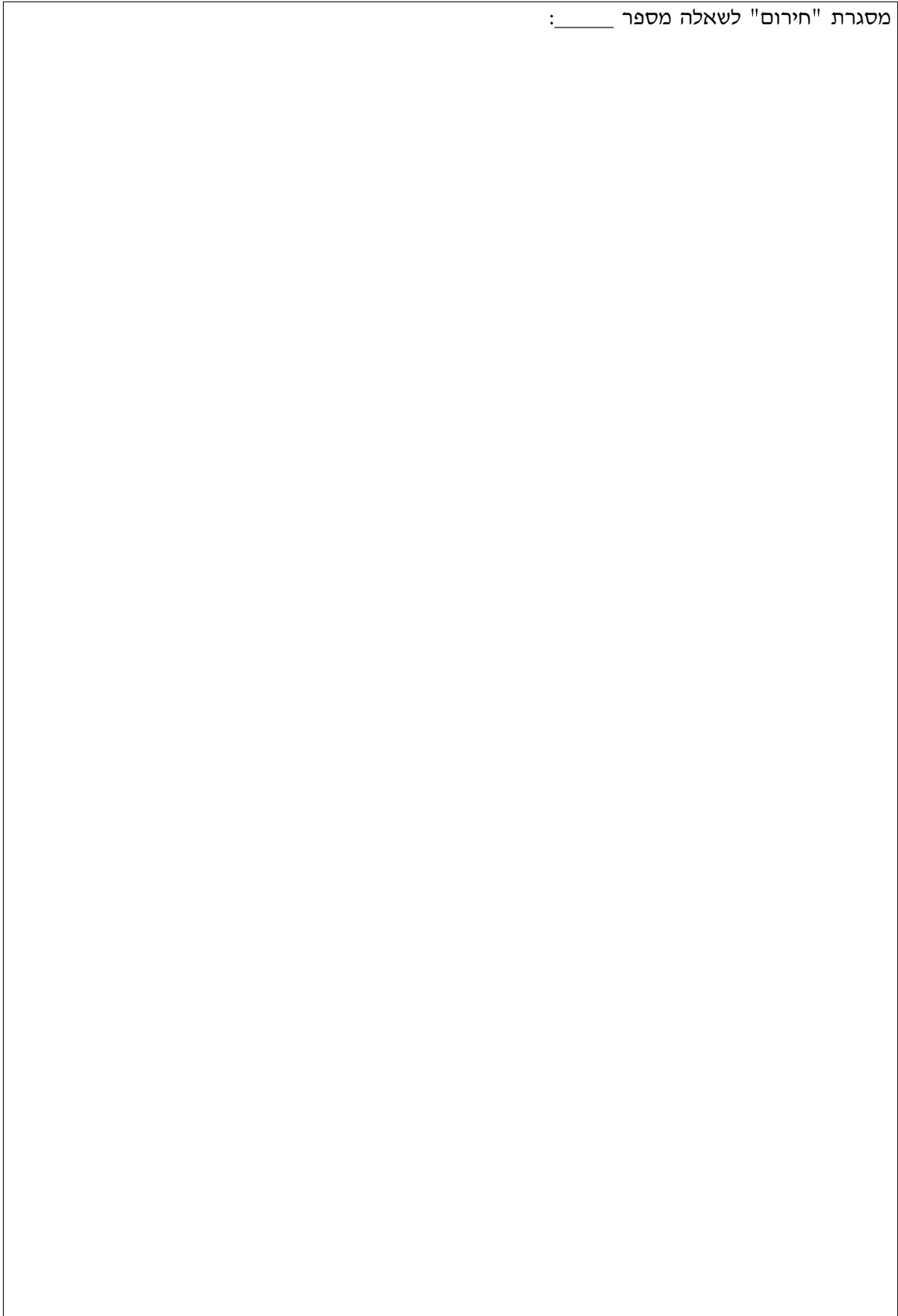
יעילות:

אלגוריתם והסבר:

ת.ז.ז.: _____

מס' מחברת: _____

מסגרת "חירוס" לשאלה מספר _____:



ת.ז.: _____

מס' מחברת: _____

מסגרת "חירוס" לשאלה מספר _____:

