



מבחן — מועד א' מקוון

תאריך: 31.1.2021, י"ח בשבט התשפ"א

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ', ג'אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות. לא יינתן זמן נוסף להתארגנות (הדפסה, סריקה, וכו')
- המבחן הוא בחומר סגור, ללא מחשבון.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר (2 עמודים).
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה/בעמוד נפרד. יש להשתדל לקצר בהסברים.
- בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- יש לסרוק ל-PDF יחיד את 8 עמודי הבחינה (ללא הנספח), כולל עמוד זה, לפי הסדר. את מסגרות החירום לא חובה לסרוק.
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל שאלה בה אתם מציגים הוכחה, ניתן להסתמך על טענות שראינו הסמסטר בשיעורים, בתירגולים ובשיעורי הבית, אם מצטטים אותן במדויק.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

שאלת בונוס: מהי משמעות הסיסמה לשאלון הבחינה? תשובה:

שאלה 1

נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$. להלן אלגוריתם לכיוון הגרף (קרי: בחירת כיוון אחד (u, v) או (v, u) לכל קשת $\{u, v\} \in E$ כך שמתקבל גרף מכוון \vec{G}):

• מריצים DFS על G ומסווגים את קשתותיו. כל קשת \underline{uv} מכוונים מההורה אל הילד; כל קשת אחורית מכוונים מהצאצא אל האב הקדמון.

הוכיחו או הפריכו: \vec{G} קשיר חזק אמ"מ G חסר גשרים.¹

הוכחה/דוגמה נגדית:

¹תזכורת: קשת נקראת גשר אם הסרתה מהגרף מגדילה את מספר רכיבי הקשירות.

שאלה 2

לצורך ראיון בתכנית ערב שישי פופולרית, מפלגת "אלגוריתמים לישראל" מעוניינת לנסח דף מסרים קליט. מהיכרותה עם צמד המנחים, הרכיבה היועצת הלשונית לקסיקון של n מילים שניתן לשבץ בדף, ולכל מילה i רשימה $S_i \subset [n]$ של מילים שרק הן יכולות להופיע בטקסט מיד אחרי מילה i . נסמן את סכום אורכי הרשימות ב- $s = \sum_i |S_i|$. מילה i היא באורך $n_i > 0$ אותיות, ומשקלה הוא $w_i \in \mathbb{R}^+$. דף המסרים מורכב מרצף של מילים כך שכל מילה מופיעה ברשימה של המילה הקודמת לה (פרט למילת הפתיחה), ומשקלו הוא סכום משקלי המילים בו. עבור מילה שחוזרת כמה פעמים בדף, כל חזרה נספרת בנפרד, הן מבחינת משקל והן מבחינת אורך. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב דף מסרים שאורכו הכולל הוא ℓ אותיות בדיוק, ממשקל מקסימלי, בכפוף לאילוצים הלשוניים.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

תזכורת: נורמת ℓ_2 של ווקטור ממשי $x = (x_1, \dots, x_k)$ היא $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$.
 נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל ממשית $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, ונתונים זוג צמתים $s, t \in V$.
 תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב מק"ב מ- s ל- t , כאשר משקל מסלול מחושב באמצעות
 נורמת ℓ_2 של משקלי קשתותיו (ניתן להניח ש- t נגיש מ- s).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 4

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. קבוצת צמתים $S \subseteq V$ נקראת בלתי-תלויה אם הגרף המושרה $G[S]$ חסר קשתות, כלומר אם לכל קשת $e \in E$ יש לפחות קצה אחד מחוץ ל- S .
 תזכורת: אם מוסיפים לתכנית לינארית P את האילוץ שכל ערכי המשתנים הם שלמים, מקבלים תכנית בשלמים IP .
 א. נסחו תכנית לינארית P כך שפתרון התכנית המתאימה בשלמים IP ייתן קבוצה בלתי-תלויה מגודל מקסימלי ב- G . ניתן להניח שאין בגרף צמתים מבודדים.
 ב. כתבו את התכנית D שהיא דואלית ל- P .
 ג. הסבירו במילים איזו בעיה מתארת התכנית הדואלית בשלמים ID .

תשובה:

שאלה 5

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית קיבול על קשתותיו $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. עבור פונקציה $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ נגדיר, כמו בשיעור, לכל צומת $u \in V$ את העודף $x_f(u)$ להיות סך הזרימה הנכנסת ל- u פחות סך הזרימה היוצאת ממנו. שימו לב שהעודף עשוי להיות שלילי, חיובי, או אפס. כמו כן, נאמר ש- f מקיימת את אילוץ הקיבול אם $f(u, v) \leq c(u, v)$ לכל $(u, v) \in E$.

בעיית העודף: בהנתן הקלט G, c, x כאשר $x: V \rightarrow \mathbb{R}$, יש להחזיר פונקציה $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ שעבורה $x_f = x$ וכן f מקיימת את אילוץ הקיבול, או לקבוע שאין f כזו.

- א. הציגו תנאי על הפונקציה x שהוא הכרחי, אך לא דווקא מספיק, לקיום f כזו (אין צורך בהסבר).
 ב. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן לפתרון בעיית העודף (כאשר מניחים שהתנאי מסעיף א' מתקיים).

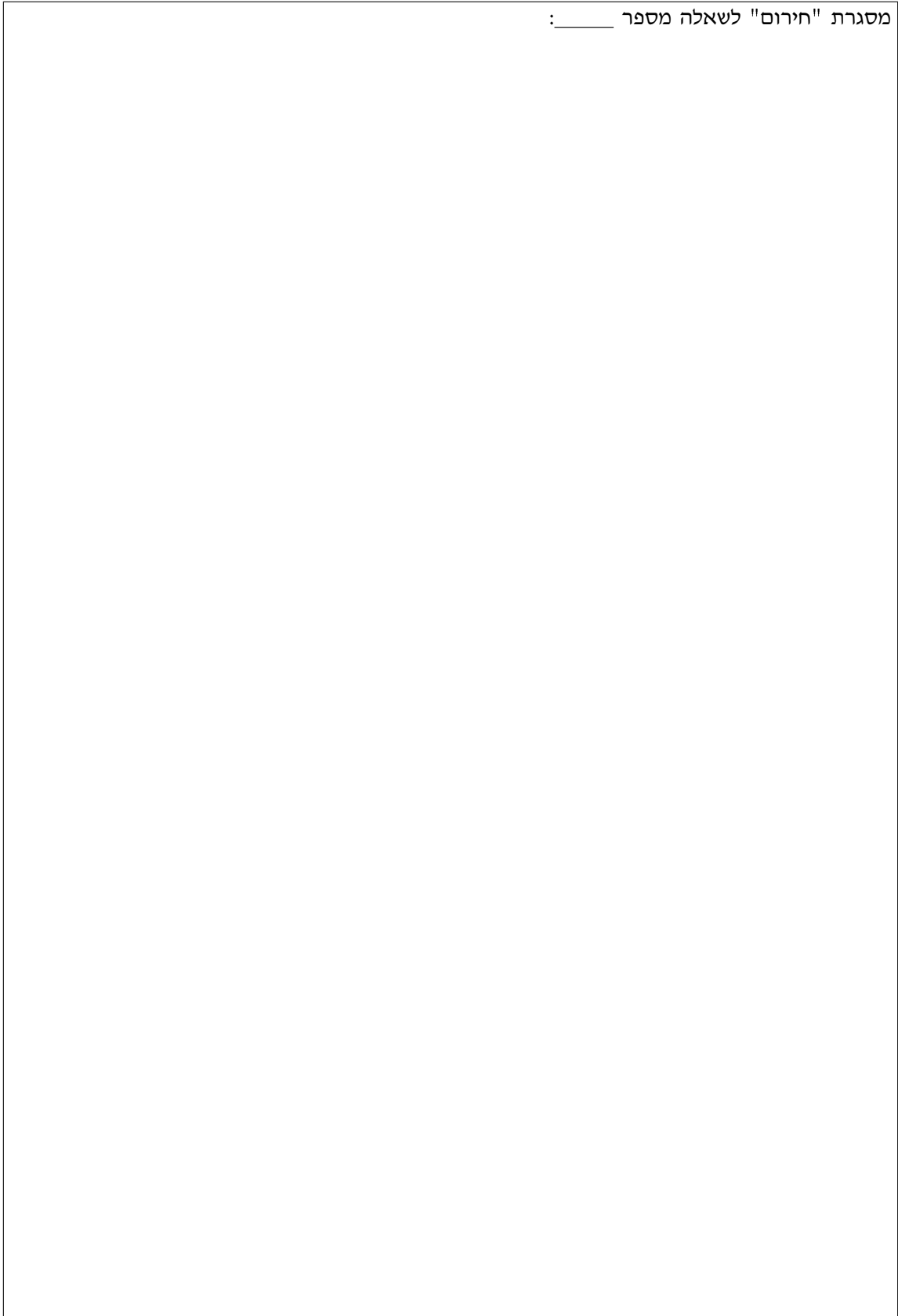
יעילות:

תנאי:

אלגוריתם והסבר:

ת.ז.ז. _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____ :



ת.ז.ז: _____

מסגרת "חירוס" לשאלה מספר _____: