מס׳ מחברת: ______ ת.ז.: ______________

אלגוריתמים (0368-2160)
סמסטר א׳ התש״ף

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל אביב

מבחן — מועד ב׳ [מתוקן]

תאריך: 6.3.2020, **י׳ באדר התש״ף**

מרצה: ד״ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ׳, ג׳אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות.
- המבחן הוא בחומר סגור.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי ״חירום״.
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע״י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	

שאלה 1

גרף מכוון $G=(V,E)$ נקרא *סולידרי* אם קיימת קבוצת צמתים $S \subseteq V$ שעבורה מתקיימים שני התנאים הבאים:

- לכל $u \in S$ קיים $v \in V \setminus S$ כך ש־v נגיש מ־u;
- לכל $v \in V \setminus S$ קיים $u \in S$ כך ש־v נגיש מ־u.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שבודק **האם** גרף מכוון נתון הוא סולידרי.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

שאלה 2

יהי גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות $w : E \to \mathbb{R}$. נסמן ב־$T = (U, F)$ את העץ המתקבל מהרצת אלגוריתם Prim מצומת $s \in V$ כלשהו למשך מספר מסוים של איטרציות.

תהיינה e_1, e_2 קשתות שחוצות את החתך $(U, V \setminus U)$, כלומר $e_i = \{u_i, v_i\} \in E$ כאשר $u_i \in U, v_i \in V \setminus U$. נניח $u_1 \neq u_2$ ונסמן ב־p את המסלול (היחיד) ב־T בין u_1 ובין u_2. הוכיחו או הפריכו:

א. **קיימת קשת $f \in p$ כך ש־$w(f) \leq \min\{w(e_1), w(e_2)\}$;** **נכון / לא נכון (הקיפו בעיגול)**

ב. **לכל קשת $f \in p$ מתקיים $w(f) \leq \max\{w(e_1), w(e_2)\}$.** **נכון / לא נכון (הקיפו בעיגול)**

הוכחות/דוגמאות נגדיות:

שאלה 3

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל חיובית $w:E\to\mathbb{R}_+$ ונתון צומת $v_0\in V$. כל צומת מייצג סניף של רשת הפיצריות *אלגו־פיצה*[1] וכל קשת $e=\{u,v\}$ מייצגת מנהרה בין הסניפים u,v באורך $w(e)$.

ביום 0 מגיע עכבר לסניף v_0. בכל לילה יכול העכבר לבחור אם להישאר בסניף הנוכחי או לטייל לסניף סמוך דרך מנהרה אחת. כל יום מגיע פקח תברואה לאחד הסניפים וביום זה אסור לעכבר להימצא בסניף הזה (בכל שאר הסניפים אין בעיה).

שירות המודיעין העכברי הצליח בדרך־לא־דרך להשיג את לוח הזמנים של הפקח, ולכן ידוע שביום i הוא יבקר בסניף x_i (עבור $i=1,2,\ldots,\ell$). לאחר ℓ הימים, העכבר רוצה לחזור לסניף ההתחלתי.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב סדרה $(v_0,v_1,\ldots,v_\ell,v_{\ell+1}=v_0)$, כאשר הצומת v_i הוא מיקום העכבר ביום i, שבה העכבר צובר קילומטראז' מנהרות מינימלי תוך שהוא חומק מהפקח.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

[1] להזמנות חייגו 03682160. כשר למהדרין בהשגחת הרב קורמן.

שאלה 4

נתונה תכנית לינארית P בצורה סטנדרטית, המתוארת ע"י מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ווקטורים $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, ונתון פתרון פיזיבילי $x \in \mathbb{R}^n$ עבורה. ידוע ש־x הוא פתרון בסיסי המתאים לצורת slack כלשהי (לא ידועה) של P.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמחשב צורת slack $\mathcal{S} = (\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}, v, N, B)$ של התכנית P כך ש־x הוא הפתרון הבסיסי המתאים ל־$\mathcal{S}$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס׳ מחברת: ______ ת.ז.: ________________

שאלה 5

בעזרתכם האדיבה מפלגת אלגוריתמים לישראל הגדילה את כוחה וכעת חולשת על חצי מהכנסת (n מתוך $2n$ מושבים). הנצחון המוחץ הכה בתדהמה את האופוזיציה, וכעת חבריה פועלים באופן לא מאורגן, אלא לפי הכלל הבא: ח״כ באופוזיציה מצביע נגד כל חוק שמישהו מהח״כים השנואים עליו מצביע בעדו, ואחרת נמנע.

נתונה לכל ח״כ $i = 1, 2 \ldots, n$ מהאופוזיציה רשימה L_i של ח״כים מהקואליציה שהוא שונא; נסמן $m = \sum_{i=1}^{n} |L_i|$.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שבודק האם הקואליציה יכולה להעביר חוקים כרצונה.

תזכורת: כדי שחוק יתקבל, מספר המצביעים בעדו צריך להיות גדול ממספר המצביעים נגדו (לנמנעים אין השפעה).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מסגרת `חירום` לשאלה מספר ______:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

מסגרת `חירום` לשאלה מספר ______: