



אלגוריתמים (0368-2160)  
סמסטר א' התש"ף

## מבחן – מועד א' [מתוקן]

תאריך: 3.2.2020, ח' בשבט התש"ף

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ', ג'אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות.
- המבחן הוא בחומר סגור.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

**בהצלחה!**

	1
	2
	3
	4
	5

## שאלה 1

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$ . כל קשת בגרף צבועה באחד משלושה צבעים: אדום, כחול, או ירוק. מעגל (מכוון, לאו דווקא פשוט) בגרף נקרא רבגוני אם הוא מכיל קשתות מכל שלושת הצבעים. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב את קבוצת הקשתות שלא שייכות לשום מעגל רבגוני.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 2

קבוצה  $U \subset V$  של צמתים בגרף מכוון  $G = (V, E)$  נקראת ראשונית אם לכל זוג צמתים  $u \in U$  ו- $v \in V \setminus U$  קיים מסלול  $u \rightsquigarrow v$  בגרף. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמקבל כקלט גרף מכוון אציקלי  $G$  על  $n$  צמתים ומספר טבעי  $0 < k < n$ , ומחזיר כפלט קבוצה ראשונית ב- $G$  בגודל  $k$  (או קובע שאין כזו). רמז: מיצאו ראשית אלגוריתם לינארי שבודק האם קבוצת צמתים נתונה  $U$  בגרף אציקלי היא ראשונית.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

### שאלה 3

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם פונקציית משקל אי-שלילית על הקשתות  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , ונתונים צמתים שונים  $s, t \in V$ . נסמן ב- $\mathcal{P}$  את קבוצת ההילוכים  $s \rightsquigarrow t$  שאינם קלים ביותר (ביחס ל- $w$ ). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב  $p \in \mathcal{P}$  ממשקל מינימלי (ניתן להניח ש- $\mathcal{P}$  אינה ריקה).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 4

נתונים  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  המאפיינים תכנית לינארית סטנדרטית  $P$  עם  $n$  משתנים ו- $m$  אילוצים. נגדיר תכנית עזר  $P'$  עם משתנה אחד נוסף  $x_0$  באופן הבא:

$$P : \begin{cases} \text{maximize} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$P' : \begin{cases} \text{maximize} & x_0 \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i x_0 \quad \forall i \\ & x_0 \leq 1 \\ & x_0, x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שצורת ה-slack ההתחלתית של  $P'$  היא תמיד פיזיבילית.  
 ב. הוכיחו שהתכנית המקורית  $P$  פיזיבילית אם"מ ערך האופטימום של  $P'$  הוא 1.  
 ג. רישמו את התכנית  $D'$ , הדואלית של  $P'$ , והוכיחו של- $D'$  יש תמיד פתרון אופטימלי שערכו שלם.

תשובה:

## שאלה 5

הבחירות חזרו, ואיתן מפלגת אלגוריתמים. אמנם המפלגה מובילה בכל הסקרים, אבל בכירי המפלגה<sup>1</sup> צריכים להתכונן לקראת העימות הטלוויזיוני באפליקציית טיקטוק. יש  $n$  נושאים על סדר היום, ועבור כל אחד מהם צריך להחליט מהי עמדת המפלגה (בעד או נגד).

אם המפלגה תומכת בנושא  $i$  אז היא תשלם על כך מחיר פוליטי בגובה  $x_i$ , ואם היא מתנגדת אז היא תשלם מחיר פוליטי בגובה  $y_i$ . כמו כן, נתונה קבוצה  $Z = \{(\{i_k, j_k\}, z_k)\}_{k=1}^m$ ; לכל  $k$ , הנושאים  $i_k, j_k$  הם קרובים רעיונית, ולכן תמיכה באחד מהם והתנגדות לאחר נתפסת בעיני הציבור כחוסר עקביות ('זיגזג') וכרוכה בתשלום של מחיר פוליטי בגובה  $z_k$ . מתקיים  $x_i, y_i, z_k > 0$  לכל  $i, k$ . תארו אלגוריתם יעיל לגיבוש עמדה שתשאיר את מפלגת אלגוריתמים קרובה לצמרת ככל הניתן.

יעילות:


אלגוריתם והסבר:

<sup>1</sup>שר החקלאות קרוסקל, שר התחבורה ג'ונסון, השר לתכנון דינאמי בלמן, סגן שר התשתיות דיניץ.

ת.ז.: \_\_\_\_\_

מס' מחברת: \_\_\_\_\_

מסגרת `חירום` לשאלה מספר \_\_\_\_\_:



ת.ז.: \_\_\_\_\_

מס' מחברת: \_\_\_\_\_

מסגרת `חירום` לשאלה מספר \_\_\_\_\_: