



אלגוריתמים (0368-2160)  
סמסטר א' התשע"ט

## מבחן – מועד א'

תאריך: 12.2.2019, ז' באדר א' התשע"ט

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: טל ינקוביץ', ג'אד סלבאק

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות.
- המבחן הוא בחומר סגור.
- בסוף המבחן מצורף נספח עזר.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

## שאלה 1

נתון גרף מכוון וקשיר חזק על  $n \geq 1$  צמתים. הוכיחו שיש לו תת-גרף פורש<sup>1</sup> קשיר חזק עם לכל היותר  $2n - 2$  קשתות.

הוכחה:

---

<sup>1</sup>תזכורת: תת-גרף  $H$  של גרף  $G$  נקרא פורש אם כל צומת של  $G$  נמצא ב- $H$ .

## שאלה 2

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שקובע האם יש ב- $G$  מעגל (מכוון) פשוט באורך לפחות 3.

הדרכה – ראשית אפיינו כיצד חייב להיראות גרף מכוון שבו כל המעגלים הפשוטים הם מאורך 2 (קרי: קשת והקשת ההפוכה לה).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

### שאלה 3

נתון גרף  $G = (V, E)$  קשיר ולא מכוון עם פונקציית משקל חיובית  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , ונתון צומת  $s \in V$ . ידוע ש- $E \neq \emptyset$  ושכל משקלי הקשתות שונים. הוכיחו/הפריכו: אם  $T_1$  הוא עפ"מ של  $G$  ביחס ל- $w$  ו- $T_2$  הוא עץ מק"בים<sup>2</sup> של  $G$  מ- $s$  ביחס ל- $w$ , אז בהכרח יש קשת משותפת ל- $T_1$  ול- $T_2$ .

הוכחה/דוגמא נגדית:

<sup>2</sup>תזכורת:  $T$  הוא עץ מק"בים של  $G$  מ- $s$  אם צמתיו  $V_T$  הם קבוצת הצמתים הנגישים מ- $s$ , ולכל  $v \in V_T$  המסלול (היחיד) ב- $T$  מ- $s$  ל- $v$  הוא מק"ב ב- $G$ .

## שאלה 4

נתון עץ  $T = (V, E)$  עם פונקציית משקל חיובית  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .  
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמחשב זיווג  $M \subseteq E$  ממשקל מקסימלי  $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## שאלה 5

הודעה דרמטית! בבחירות הקרובות לכנסת תתמודד מפלגת "אלגוריתמים לישראל". יש שלוש פעילויות באמצעותן מגייסים קולות: שליחת הודעות טקסט, חלוקת עלונים בכניסה לשרייבר, וויכוחים קולניים בתחנת הרכבת. לרשות המפלגה עומדים  $n$  מתנדבים, כאשר מתנדב  $i$  מוכן להשקיע עד  $D_i$  ימי התנדבות. יום של מתנדב  $i$  צפוי להניב  $s_i, t_i$  או  $r_i$  קולות, בהתאם לפעילות בה עסק ( $t_i = \text{טקסט}$ ,  $s_i = \text{שרייבר}$ ,  $r_i = \text{רכבת}$ ). כמו כן, משרד התקשורת אוסר על מפלגות לשלוח הודעות במשך יותר מ- $T$  ימים, משרד החינוך אוסר על פעילות פוליטית באוניברסיטה במשך יותר מ- $S$  ימים ומשרד התחבורה אוסר על הקמת רעש בתחנות רכבת למשך יותר מ- $R$  ימים. המספרים  $R, S, T, D_i, r_i, s_i, t_i$  הם קבועים ממשיים חיוביים.

עזרו למפלגה לכתוב תכנית לינארית באמצעותה תגרוף, בעזרת המתנדבים, קולות רבים ככל הניתן. כדי לא להיחשד בהטייה פוליטית, רישמו לאחר מכן את התכנית הדואלית.

תכניות לינאריות:

ת.ז.: \_\_\_\_\_

מס' מחברת: \_\_\_\_\_

מסגרת `חירום` לשאלה מספר \_\_\_\_\_:

ת.ז.: \_\_\_\_\_

מס' מחברת: \_\_\_\_\_

מסגרת `חירום` לשאלה מספר \_\_\_\_\_: