מס' מחברת: _____ ת.ז.: ______________

אלגוריתמים (0368-2160)
סמסטר א' התשע"ח

מבחן — מועד א' (גרסא מתוקנת)

תאריך: 20.2.2018, ה' באדר התשע"ח

מרצה: ד"ר רני הוד

מתרגלים: אופיר פרידלר, אלון עדן

- מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
- משך הבחינה שלוש שעות.
- חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	

מס' מחברת: ______ ת.ז.: _______________

שאלה 1

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ ונתונים צמתים שונים $s,t\in V$. עבור מסלול (מכוון) p מ־s ל־t נגדיר את *המשקל האציקלי* של p להיות סכום משקלי הקשתות ב־p שלא משתתפות בשום מעגל (מכוון) של G.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא מסלול מ־s ל־t ממשקל אציקלי מינימלי, או מודיע שלא קיים כזה.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

שאלה 2

נתון גרף $G=(V,E)$ קשיר ולא מכוון עם פונקציית משקל $w:E\to\{1,2,4,8,16,\ldots,2^{|V|}\}$ (כלומר המשקלים הם חזקות של 2).
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא עפ"מ של G ביחס ל־w.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

שאלה 3

נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s, בור t ופונקציית קיבול חיובית $c : E \to \mathbb{R}^+$. כמו כן נתונה זרימה מקסימלית f מ־s ל־t ברשת זו (ידוע ש־t נגיש מ־s).
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא תת־קבוצה $E_1 \subseteq E$ בגודל מינימלי, כך שאם נגדיל ב־1 את הקיבול של כל אחת מקשתות E_1, אז הזרימה f כבר לא תהיה מקסימלית.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

שאלה 4

נתונים מחרוזת $T = t_1 t_2 \cdots t_L$ באורך L תווים ו־n אינדקסים שלמים $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n < L$.
רוצים לחתוך את המחרוזת למקטעים בנקודות החיתוך $i_1, \ldots, i_n$, כך שתתקבלנה $n+1$ המחרוזות

$$S_0 = t_1 t_2 \cdots t_{i_1}, \quad S_1 = t_{i_1+1} t_{i_1+2} \cdots t_{i_2}, \quad \ldots \quad , S_n = t_{i_n+1} t_{i_n+2} \cdots t_L$$

כאשר הפעולה הבסיסית היא חיתוך של מחרוזת קיימת באורך k בנקודת חיתוך $0 < i < k$. הפעולה עולה k ביטקוין ומייצרת שתי מחרוזות באורכים i ו־$k-i$.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב מהו סדר החיתוכים שעלותו מינימלית.

דוגמא: עבור המקרה $L = 10$, $n = 2$, $i_2 = 6$, $i_1 = 3$ יותר זול לחתוך קודם ב־i_2 (ואז משלמים 16) מאשר לחתוך קודם ב־i_1 (ואז משלמים 17).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

שאלה 5

<u>הערה</u>: לשאלה זו גרסא פשוטה וגרסא מלאה. פתרון נכון של הגרסא הפשוטה מזכה במלוא הנקודות; פתרון נכון של הגרסא המלאה מזכה גם בנקודות בונוס. אנא ציינו איזו גרסא בחרתם לפתור.

נתונה מטריצה ממשית A עם m שורות ו־n עמודות, ונתון וקטור ממשי b באורך m.
הוכיחו שמתקיים <u>בדיוק אחד</u> מבין המקרים הבאים:

גרסא פשוטה:

1. קיים וקטור ממשי אי־שלילי x באורך n עבורו מתקיים $Ax \le b$.
2. קיים וקטור ממשי אי־שלילי y באורך m עבורו מתקיים ש־$b^t y < 0$ וכן הווקטור $A^t y$ הוא אי־שלילי.

גרסא מלאה:

1. קיים וקטור ממשי אי־שלילי x באורך n עבורו מתקיים $Ax = b$.
2. קיים וקטור ממשי y באורך m עבורו מתקיים ש־$b^t y < 0$ וכן הווקטור $A^t y$ הוא אי־שלילי.

הוכחה:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: __________________

מסגרת "חירום" לשאלה מספר ______:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

מסגרת "חירום" לשאלה מספר ______: