ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשע"ב, מועד ב'

תאריך: 9 בספטמבר 2012

מרצים: פרופ' נוגה אלון, רני הוד, אדם שפר

מתרגלים: רני הוד, שי ורדי

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	

שאלה 1

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, זוג צמתים $s, t \in V$ ופונקציית משקל על הקשתות $w : E \to \mathbb{Z}$ (כלומר: כל המשקלים שלמים, וייתכנו משקלים שליליים).
תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם קיים מסלול במשקל אי זוגי מ-s אל t.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

רישמו את התוכנית הלינארית המתאימה לבעיה הבאה ואת התוכנית הדואלית לה.

נתונות n נקודות שונות במישור $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. רוצים לצייר n עיגולים גדולים ככל האפשר במישור (קרי: סכום היקפי העיגולים צריך להיות מירבי) כך שהנקודה (x_i, y_i) היא מרכזו של עיגול i והעיגולים זרי־פנים בזוגות. במילים אחרות, אסור ששני עיגולים ייחתכו או שעיגול יכיל עיגול אחר בתוכו; מותר לשני עיגולים להשיק זה לזה כל עוד אין להם נקודות פנימיות משותפות. נקודה בפני עצמה נחשבת כעיגול עם רדיוס 0 והיקף 0.

התוכנית הלינארית:

התוכנית הדואלית:

שאלה 3

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון עם פונקציית משקל אי־שלילית על הקשתות $w:E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, ויהי T עץ פורש מינימלי של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. **לכל** זוג צמתים $u,v\in V$ קיים מסלול קל ביותר בין u ו-v אשר משתמש רק בקשתות מ-T.
2. **קיים** זוג צמתים $u,v\in V$ כך שישנו מסלול קל ביותר בין u ו-v שמשתמש רק בקשתות מ-T.
3. **קיימים לפחות** $|V|-1$ זוגות צמתים $u,v\in V$ כך שישנו מסלול קל ביותר בין u ו-v אשר משתמש רק בקשתות מ-T.

פתרון:

שאלה 4

בקפיטריה של אקו יש n מגשי אוכל ריקים. נתון כי מגש i הוא באורך l_i וברוחב w_i. ניתן למקם את מגש i מעל מגש j אם $l_i \leq l_j$ וגם $w_i \leq w_j$. על כל מגש ניתן להניח ישירות רק מגש אחד (כלומר אסור למגש להכיל שני מגשים ישירות עליו, זה לצד זה). ניתן לסובב מגש ב־90 מעלות על מנת שנוכל למקם אותו על מגש אחר, אך כל המגשים צריכים להיות מקבילים לצירים (כלומר, אסור לשים מגשים באלכסון, ולכן סיבוב שקול להחלפה בין האורך והרוחב). ניתן להניח כי $\{l_i, w_j\}_{i=1}^{n}$ הם מספרים ממשיים חיוביים שונים.

תארו אלגוריתם יעיל המחשב ערימה גדולה ככל האפשר של מגשים הניתנים למיקום אחד על השני.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ מ-s ל-t עם קיבולים $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ונתונה קשת נוספת $e \in E$.
תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם קיים ברשת חתך מינימלי אשר אינו מכיל את הקשת e.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר ______, סעיף ______:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

מסגרת "חירום" לשאלה מספר ______, סעיף ______: