

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תשע"א , מועד א'

תאריך: 23.06.2011

מרצים: פרופ' נוגה אלון, פרופ' יוסי עזר, פרופ' רון שמיר

מתרגלים: רני הוד, אדם שפר

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.

במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורפות שלוש מסגרות נוספות, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

		1
		2
		3
		4
		5

שאלה 1**סעיף א' (50% מניקוד השאלה)**

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלגוריתם למציאת המסלול הקל ביותר בגרף $p : u \rightsquigarrow v$ ביחס למשקל w . שימו לב: (1) הצמתים u, v אינם נתונים; (2) ייתכן כי $u = v$ והמסלול p ריק; (3) המסלול p לאו דווקא פשוט - ניתן לחזור על צמתים ו/או קשתות.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב' (50% מניקוד השאלה)

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, וקשת $e \in E$. בנוסף, ידוע שאין מעגלים שליליים בגרף. תארו אלגוריתם יעיל למציאת המסלול הקל ביותר בגרף מבין המסלולים העוברים דרך הקשת e . המסלול עשוי לבקר יותר מפעם אחת בצמתים ו/או קשתות.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתונים גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל¹ על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת-גרף פורש² וקשיר $G' = (V, E')$ שסכום משקלי הקשתות שבו מינימלי.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

¹כלומר, ייתכנו גם משקלים חיוביים וגם משקלים שליליים.
²תת גרף פורש הינו גרף המכיל את כל הקודקודים של הגרף המקורי ותת קבוצה של הקשתות. כלומר, $E' \subseteq E$.

שאלה 3

סעיף א' (25% מניקוד השאלה)

כחלק מאלגוריתם KMP, מחושבים ערכי פונקציית הרישא π של התבנית $P = P[1], P[2], \dots, P[m]$. רישמו את ההגדרה של פונקציית π (כלומר, מהי המשמעות של $\pi[j]$).

הגדרה:

סעיף ב' (75% מניקוד השאלה)

להלן האלגוריתם לחישוב פונקציית π שראינו בשיעור. הוכיחו שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $O(m)$. בשאלה זו אסור להניח דברים שנלמדו בשיעור.

```

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P)
1  m ← length[P]
2  π[1] ← 0
3  k ← 0
4  for j ← 2 to m
5      do while k > 0 and P[k + 1] ≠ P[j]
6          do k ← π[k]
7          if P[k + 1] = P[j]
8              then k ← k + 1
9          π[j] ← k
10 return π

```

הוכחה:

שאלה 4

נתונים רשת זרימה מכוונת $G = (V, E)$ עם קיבולים שלמים $C : E \rightarrow \mathbb{N}$, זוג צמתים $s, t \in V$ וזרימה מקסימלית שלמה f^3 מ- s אל t . מגדילים ב-1 את הקיבול של שבע מקשתות הרשת $e_1, \dots, e_7 \in E$, ומקטינים ב-1 את הקיבול של קשת שמינית $e_8 \in E$ (כל שמונה הקשתות שונות, והקיבול של e_8 ברשת המקורית חיובי). תארו אלגוריתם יעיל למציאת זרימה מקסימלית מ- s אל t ברשת החדשה.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

³תזכורת - זרימה שלמה היא זרימה המעבירה ערך שלם דרך כל אחת מקשתות הרשת.

שאלה 5

נתונים גרף מכוון אציקלי⁴ $G = (V, E)$ ופונקציית משקל⁵ על הצמתים $w : V \rightarrow \mathbb{R}$. עבור זוג צמתים $u, v \in V$, נסמן ב- $p(u, v)$ את מספר המסלולים השונים מ- u אל v ב- G (המסלולים לאו דווקא זרים בקשתות). נגדיר פונקציה נוספת על הצמתים

$$\alpha(u) = \sum_{v \in V \setminus \{u\}} p(u, v) \cdot w(v).$$

תארו אלגוריתם אשר מחשב את ערכי α של כל צמתי הגרף ואשר זמן הריצה שלו הינו $O(|V| + |E|)$ (ערכי הפונקציה $p(u, v)$ אינם נתונים).

אלגוריתם והסבר:

⁴כלומר, חסר מעגלים מכוונים.⁵כלומר, ייתכנו גם משקלים חיוביים וגם משקלים שליליים

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:



מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____: