ת.ז.: ______________ מס' מחברת: _____

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשע"א , מועד

תאריך:

מרצים: פרופ' עמוס פיאט, פרופ' מיכה שריר

מתרגלים: רני הוד, אדם שפר

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	

שאלה 1

נתון גרף קשיר, לא מכוון וחסר גשרים $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם לינארי אשר מכוון את קשתות הגרף כך שהגרף שמתקבל הינו קשיר בחוזקה (כלומר, מכיל רק"ח יחיד).

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתונים גרף לא מכוון $G = (V, E)$ עם משקלים על הקשתות, ומספר k שלם וחיובי. עבור תת־קבוצה $E' \subseteq E$, תת הגרף הפורש $G' = (V, E')$ של G נקרא *יער k-פורש* אם הוא יער בן k עצים בדיוק. יער k-פורש של G נקרא *מינימלי* אם סכום משקלי הקשתות שלו אינו גדול מסכום משקלי הקשתות של אף יער k-פורש אחר של G.
תארו אלגוריתם יעיל למציאת יער k-פורש מינימלי של G.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ ונתון צומת $s\in V$. ידוע שהקשת $e\in E$ היא הקשת היחידה בעלת משקל שלילי. תארו אלגוריתם בסיבוכיות $O\left(|E|+|V|\log|V|\right)$ אשר מוצא את המסלולים הקלים ביותר מ-s לכל שאר צמתי הגרף.

אלגוריתם והסבר:

שאלה 4

נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$, פונקציית קיבול אי־שלילית על הקשתות $c:E\to\mathbb{R}^+$, ופונקציית מחיר אי־שלילית על הקשתות $p:E\to\mathbb{R}^+$. ברצוננו לשנע m סוגים של מחצבים בעזרת הרשת. עבור $i=1,2,\ldots,m$, יש להעביר $d_i>0$ ק"ג של מחצב i ממכרה הממוקם בצומת $s_i\in V$ למפעל הממוקם בצומת $t_i\in V$. עלות השימוש בקשת $e\in E$ היא $p(e)$ שילינג לכל ק"ג שעובר דרכה, ללא תלות בסוג המחצב; בנוסף, סך המשקל שיכול לעבור בקשת זו מוגבל ל-$c(e)$ ק"ג לכל היותר. מבין אסטרטגיות השינוע אשר מספקות את האילוצים לעיל, אנו מחפשים אחת שמביאה למינימום את העלות הכוללת, שהיא סכום עלויות הקשתות.

נסחו תוכנית לינארית לבעיה והסבירו אותה בקצרה.

תוכנית לינארית והסבר:

שאלה 5

נתון מבוך לעכברים הבנוי בצורת סריג בגודל $n \times n$. ביתר פירוט, נסמן את n^2 חדרי המבוך ע"י $r(i,j)$, לכל $1 \leq i,j \leq n$; מחדר $r(i,j)$ יוצאות ארבע מנהרות אשר מובילות לארבעת החדרים $r(i \pm 1, j), r(i, j \pm 1)$, כאשר סימונים מהסוג $r(i,0), r(0,j), r(i,n+1), r(n+1,j)$ מייצגים יציאה מהמבוך ולא חדרים אמיתיים. בכל אחת ממנהרות המבוך ממקמים חריץ גבינה (כלומר, במעברים ולא בחדרים עצמם), ולאחר מכן בוחרים k חדרים שונים ובכל אחד, הס־פן־תעיר, שמים עכבר.

קוד הכבוד של העכברים קובע במפורש:

1. עכבר לא ייכנס למנהרה נטולת גבינה.
2. עכבר יזלול עד תום כל גבינה נצפית ואז ימשיך לחדר הסמוך.
3. עכבר יכבד את המרחב האישי של עכבר אחר, ועל כן לא ייכנס למנהרה שבה נמצא כעת עכבר אחר עד שיפנה אותה[1]. עם זאת, מותר לעכברים לשהות יחדיו בחדר.

נבחין כי עשוי להיווצר מצב בו עכבר "נתקע" בחדר המוקף ע"י מנהרות ריקות. תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם בריחה משותפת של כל העכברים מהמבוך היא אפשרית; כלומר, על האלגוריתם למצוא מסלול חוקי לכל עכבר כך שכל העכברים ייצאו מהמבוך, או להודיע שלא ניתן לעשות זאת.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

[1] ואז לא ייכנס למנהרה כי כבר אין בה גבינה.

ת.ז.: ________________ מס' מחברת: _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:

ת.ז.: ________________ מס' מחברת: _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____: