

## מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תש"ע, מועד ב'

תאריך: 24/06/10

מרצים: פרופ' יוסי עזר, פרופ' רון שמיר.

מתרגלים: ידעאל ולדמן, אדם שפר.

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.  
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י דשימת שכנויות.

בהצלחה!

		1
		2
		3
		4
		5

## שאלה 1

## סעיף א'

נתונים רשת זרימה מכוונת  $G = (V, E)$  וזוג קודקודים  $s, t \in V$ , כך שבנוסף לפונקציית הקיבול על הקשתות  $C : E \rightarrow \mathbb{N}_1$ , קיימת גם פונקציית קיבול על הצמתים  $D : V \rightarrow \mathbb{N}_1$  (תזכורת:  $\mathbb{N}_1$  הינה קבוצת השלמים החיוביים). נגיד שזרימה היא חוקית אם היא מקיימת את כל אילוצי הזרימה הרגילים, ובנוסף – הזרימה שנכנסת לכל צומת אינה עולה על קיבול הצומת (במקרה של המקור, הזרימה היוצאת מהצומת). תארו אלגוריתם יעיל למציאת זרימה חוקית מקסימלית מ- $s$  אל  $t$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

## סעיף ב'

כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון שכל קיבולי הקודקודים, פרט לאלו של  $s$  ושל  $t$ , הם 1?

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**שאלה 2**

נתון גרף קשיר ולא מכוון  $G = (V, E)$  עם פונקציית משקל חיובית על הקשתות  $w : E \rightarrow (0, \infty)$ . בנוסף, נתונה קבוצת קשתות  $E' \subseteq E$ , כך שנתת הגרף  $G' = (V, E')$  חסר מעגלים. תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא, מבין העצים הפורשים המכילים את כל קשתות  $E'$ , עץ בעל משקל מינימאלי (שימו לב שלא בהכרח מדובר בעפ"מ).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**שאלה 3****סעיף א'**

נתונה סדרה של מספרים ממשיים  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת סידרה מונוטונית לא יורדת באורך מקסימאלי (האיברים בתת הסדרה אינם צריכים להיות סמוכים בסדרה המקורית, אך צריכים להשאר באותו הסדר כמו בסדרה המקורית).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**סעיף ב'**

נסמן את אורך תת הסידרה שנמצאה בסעיף הקודם בתור  $k$ . תארו אלגוריתם יעיל לחישוב מספר תתי הסדרות (המונוטוניות לא יורדות) באורך  $k$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**שאלה 4****סעיף א'**

נתונים גרף מכוון  $G = (V, E)$ , זוג קודקודים  $s, t \in V$ , ופונקציית משקל  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . בנוסף, ידוע שאין בגרף מעגלים שליליים. תארו אלגוריתם יעיל המוצא מבין המסלולים הקצרים ביותר (ביחס למספר הקשתות) מ- $s$  ל- $t$  מסלול קל ביותר ביחס ל- $w$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**סעיף ב'**

נתונים גרף מכוון  $G = (V, E)$ , זוג קודקודים  $s, t \in V$ , ושתי פונקציות משקל  $w, w' : E \rightarrow \mathbb{R}$ . בנוסף, ידוע שאין בגרף מעגלים שליליים, גם לפי משקלי  $w$  וגם לפי משקלי  $w'$ . תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא, מבין המסלולים הקלים ביותר מ- $s$  אל  $t$  לפי פונקציית המשקל  $w$ , מסלול קל ביותר מ- $s$  אל  $t$  לפי פונקציית המשקל  $w'$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**שאלה 5**

נתונים גרף מכוון  $G = (V, E)$  וקבוע שלם  $k$ . תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת־קבוצה  $U \subseteq V$  בגודל  $k$  אשר מקיימת את התכונות הבאות. לכל קודקוד  $v \in V \setminus U$  קיים קודקוד  $u \in U$  כך שישנו מסלול מכוון מ־ $v$  אל  $u$ , ובנוסף לא קיים מסלול מכוון בין שני איברים שונים של  $U$ . אם לא קיימת תת־קבוצה מתאימה, על האלגוריתם להתריע על כך.

יעילות:

אלגוריתם והסבר: