

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' התשס"ט, מועד א'

תאריך: 2.7.2009

מרצים: פרופ' נוגה אלון, ד"ר איריס רוזנבלום

מתרגלים: רני הוד, דני פלדמן

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
- במבחן 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם יש להציג אלגוריתם יעיל ככל האפשר בליווי הסבר מתאים.

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

שאלה 1

נתונה סדרה $X = x_1x_2 \cdots x_n$ כאשר לכל $1 \leq i \leq n$, $x_i \in \{a, b, c\}$. תארי אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב רצף $x_i x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_j$ עבורו מספר ההופעות של a פחות מספר ההופעות של b מקסימלי. במילים אחרות,

$$|\{p : i \leq p \leq j, x_p = a\}| - |\{p : i \leq p \leq j, x_p = b\}|$$

מקסימלי מבין כל הבחירות האפשריות ל- i, j עבור $1 \leq i \leq j \leq n$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתונים תבנית $P = p_1 p_2 \dots p_m$ וטקסט $T = t_1 t_2 \dots t_n$ מעל א"ב סופי Σ ונתונה גם קבוצה לא ריקה $M \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא את כל ערכי q , $1 \leq q \leq n$, עבורם

$$|\{k : 1 \leq k \leq m, P_k \text{ is a suffix of } T_q\}| \in M$$

כאשר X_i מסמן את הרישא באורך i של מחרוזת X .

דוגמא: עבור $P = aabaac$, $T = abcbaabaaca$ ו- $M = \{1, 3, 5\}$ התשובה היא $\{1, 5, 7, 9, 10, 11\}$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s , בור t ופונ' קיבול $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ונתונה זרימה f ברשת. נניח שמצאנו מסילה משפרת $P : s \rightsquigarrow t$ ברשת השיורית G_f שאורכה בקשתות מינימלי. תהיה g הזרימה ברשת G המתקבלת מ- f לאחר שהזרמנו לאורך P את הקיבול השיורי $c(P)$. הוכח/הוכיחי כי לכל צומת $v \in V$ מתקיים $\delta_g(s, v) \geq \delta_f(s, v)$ כאשר δ_f, δ_g הם המרחקים ברשתות השיוריות G_f, G_g בהתאמה.

הוכחה:

שאלה 4

תארי אלגוריתם יעיל ככל האפשר המקבל רשימה של m דרישות ובודק האם קיים אוסף של n קטעים פתוחים לא ריקים בישר \mathbb{R} , $I_k = (a_k, b_k)$ עבור $k = 1, 2, \dots, n$, המקיים את כל הדרישות. קיימים שני סוגים של דרישות:

1. הקטע I_i נמצא כולו מימין לקטע I_j .
 2. הקטעים I_i ו- I_j נחתכים.

דוגמאות:

1. אוסף הדרישות הבא לא ניתן למימוש:

(א) I_1 כולו מימין ל- I_2 , (ב) I_2 כולו מימין ל- I_3 , (ג) I_1 ו- I_3 נחתכים.

2. אוסף הדרישות הבא ניתן למימוש, למשל ע"י $I_1 = (1, 10)$, $I_2 = (5, 8)$, $I_3 = (0, 3)$:

(א) I_1 ו- I_2 נחתכים, (ב) I_1 ו- I_3 נחתכים, (ג) I_2 כולו מימין ל- I_3 .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

נתון גרף $G = (V, E)$ מכוון וקשיר בחזקה המיוצג ע"י רשימות שכנות, נתונה פונקציה משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונים זוג צמתים שונים $u, v \in V$. ידוע שאין בגרף מעגל שלילי ביחס ל- w .
 תארו/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא, עבור כל ערך של k , $2 \leq k \leq |V| - 1$, את המשקל הקל ביותר של מסילה מכוונת $u \rightsquigarrow v$ שאורכה לכל היותר k קשתות (אם יש כזו).

הערה: האלגוריתם מחשב, אם כן, $|V| - 2$ ערכים מ- $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____:



מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____: